【5.1】

正整数 l を与える．

各正整数 n に対して，$y = x^l \sin nx \ (0 \leq x \leq 2\pi)$ のグラフと x 軸で囲まれた領域を $\mathfrak{D}_n$ とする．

(1) $\mathfrak{D}_n$ を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を V_n と表すとき，$\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ の値を求めよ．

(2) $\mathfrak{D}_n$ を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を W_n と表すとき，$\lim\limits_{n\to\infty} W_n$ の値を求めよ．

【解答】

(1) x 軸を回転軸とする回転体の体積 V_n は，

$$V_n = \pi \int_0^{2\pi} y^2 \,\mathbf{d}x = \pi \int_0^{2\pi} x^{2l} \sin^2(nx) \,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

(1.1) に対して，$nx = t$ と置換して，

$$V_n = \pi \int_0^{2n\pi} \left(\frac{t}{n}\right)^{2l} \sin^2 t \,\frac{\mathbf{d}t}{n} = \frac{\pi}{n^{2l+1}} \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{2l} \sin^2 t \,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

ここで，

$$(k-1)\pi \leq t \leq k\pi \iff \big((k-1)\pi\big)^{2l} \leq t^{2l} \leq (k\pi)^{2l} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) の各辺を区間 $[(k-1)\pi,\ k\pi]$ で積分して，

$$\big((k-1)\pi\big)^{2l} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 t \,\mathbf{d}t \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{2l} \sin^2 t \,\mathbf{d}t \leq (k\pi)^{2l} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 t \,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

ここで，

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 t \,\mathbf{d}t = \frac{1}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (1 - \cos(2t)) \,\mathbf{d}t = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi} = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) を (1.4) の両辺に代入して，

$$\frac{\pi^{2l+1}}{2} (k-1)^{2l} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{2l} \sin^2 t \,\mathbf{d}t \leq \frac{\pi^{2l+1}}{2} k^{2l} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) により (1.2) の各積分を評価すれば，

$$\frac{\pi^{2l+2}}{2} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{2l} \leq V_n \leq \frac{\pi^{2l+2}}{2} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2l} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

ここで，**区分求積法**により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \left(\frac{r}{n}\right)^{2l} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2l} = \int_0^2 x^{2l} \,\mathbf{d}x = \frac{2^{2l+1}}{2l+1} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

(1.7), (1.8) により，

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{2^{2l} \pi^{2l+2}}{2l+1} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(2) y 軸を回転軸とする回転体の体積 W_n は,

$$W_n = 2\pi\int_0^{2\pi} x\,|y|\,\mathbf{d}x = 2\pi\int_0^{2\pi} x\left|x^l\sin(nx)\right|\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

(1.10) に対して，$nx = t$ と置換して,

$$W_n = 2\pi\int_0^{2n\pi}\left(\frac{t}{n}\right)^{l+1}\left|\sin t\right|\,\frac{\mathbf{d}t}{n} = \frac{2\pi}{n^{l+1}}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{l+1}\sin t\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

(1.3) と同様にして,

$$\big((k-1)\pi\big)^{l+1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin t\,\mathbf{d}t \le \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{l+1}\sin t\,\mathbf{d}t \le (k\pi)^{l+1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin t\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

ここで,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin t\,\mathbf{d}t = \Big[-\cos t\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi} = \cos(k-1)\pi - \cos(k\pi) = (-1)^{k-1} - (-1)^k = 2(-1)^{k-1} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

(1.13) を (1.12) の両辺に代入して,

$$2(-1)^{k-1}\big((k-1)\pi\big)^{l+1} \le \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^{l+1}\sin t\,\mathbf{d}t \le 2(-1)^{k-1}(k\pi)^{l+1} \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) により (1.11) の各積分を評価すれば,

$$4\pi^{l+2}\times\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n-1}\left(\frac{r}{n}\right)^{l+1} \le W_n \le 4\pi^{l+2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^{l+1} \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

ここで，**区分求積法**により,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n-1}\left(\frac{r}{n}\right)^{l+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^{l+1} = \int_0^2 x^{l+1}\,\mathbf{d}x = \frac{2^{l+2}}{l+2} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

(1.15), (1.16) により,

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \frac{2^{l+4}\pi^{l+2}}{l+2} \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

【5.2】

$n=0,1,2,\cdots$ に対して，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と定義する．ただし，$\sin^0 x=1$ とする．

(1) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，

$$\begin{cases} I_n \geq I_{n+1} & \cdots\cdots(2.2) \\ I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n & \cdots\cdots(2.3) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，

$$a_n=\left(\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と定義するとき，a_n を I_{2n}, I_{2n+1} を用いて表せ.

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

【解答】 – Wallis の公式 –

(1) $0\leq\sin x\leq 1$ より，$0\leq\sin^n x\leq 1$. 即ち，

$$(0\leq)\ \sin^{n+1}x\leq\sin^n x\ (\leq 1) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,\mathbf{d}x\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathbf{d}x \iff I_{n+1}\leq i_n \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

即ち，数列 $\{I_n\}$ は**単調減少列**である.

次に，部分積分法により，

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,\mathbf{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\times\sin x\,\mathbf{d}x$$

$$=\Big[-\cos x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin^2 x)\,\mathbf{d}x$$

$$=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$$

$$\therefore\ (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n \iff I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2) 漸化式 (2.3) を繰り返し用いて，

● n : *even* の場合;

$$I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}I_0\ \wedge\ I_0=\frac{\pi}{2} \iff I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

● n : *odd* の場合;

$$I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}I_1\ \wedge\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathbf{d}x=1 \iff I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times 1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.4), (2.6), (2.7) により，

$$a_n = \left(\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\times\frac{\pi}{2} \iff a_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\,\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(3) (2.2), (2.3), (2.8) により，

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n}} \iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.9) において，$n\to\infty$ とすれば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

【5.3】

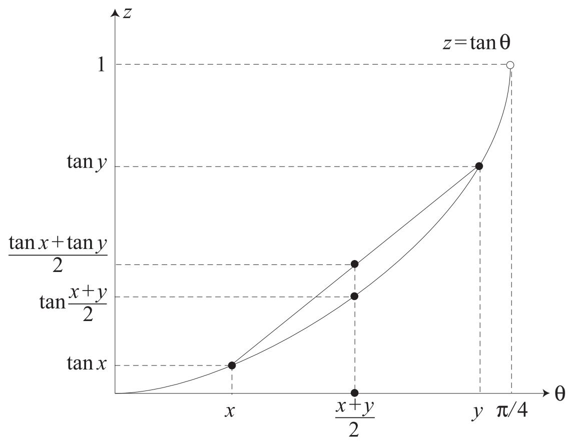
実数 x, y に対して，次の不等式の成立を示せ.

$$\sqrt{\tan x \tan y} \le \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{\tan x + \tan y}{2} \qquad \left(0 \le x < \frac{\pi}{4},\ 0 \le y < \frac{\pi}{4}\right)$$

【解答】

次の不等式 (3.1), (3.2) に分割して示す.

$$\begin{cases} \sqrt{\tan x \tan y} \le \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right) & \cdots\cdots(3.1) \\ \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \le \dfrac{\tan x + \tan y}{2} & \cdots\cdots(3.2) \end{cases}$$



● (3.2) の証明;

関数 $\tan\theta$ の $0 \le \theta < \pi/2$ における下方凸性でから，

$x \ne y \land 0 \le x < \pi/4 \land 0 \le y < \pi/4$ のとき，**上図**により，

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\tan x + \tan y}{2} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

が成り立ち，$x = y$ のとき明らかに，

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\tan x + \tan y}{2} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が成り立つので，(3.3), (3.4) により，(3.2) が成立.

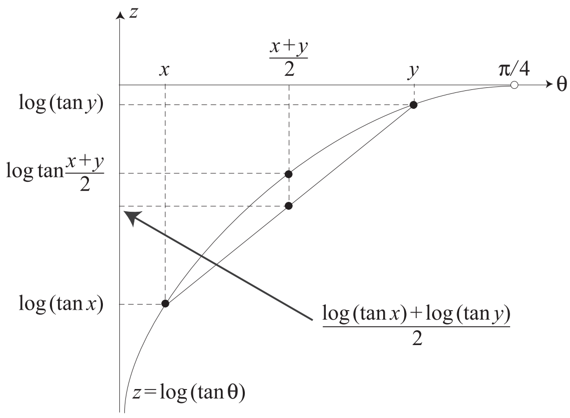
● (3.1) の証明;

関数 $\log(\tan\theta)$ $(0 < \theta < \pi/4)$ に対して，

$$\{\log(\tan\theta)\}' = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} > 0$$

$$\land\ \{\log(\tan\theta)\}'' = -\frac{4\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} < 0 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

により，$0 < \theta < \pi/4$ において単調増加かつ上に凸.



$\star\, x \ne y \land 0 < x < \pi/4 \land 0 < y < \pi/4$ のとき，**下図**により，

$$\frac{\log(\tan x) + \log(\tan y)}{2} < \log\left(\tan\frac{x+y}{2}\right) \iff \sqrt{\tan x \tan y} < \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

$\star\, x = y \land 0 < x < \pi/4 \land 0 < y < \pi/4$ のとき，明らかに，

$$\frac{\log(\tan x) + \log(\tan y)}{2} = \log\left(\tan\frac{x+y}{2}\right) \iff \sqrt{\tan x \tan y} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

$\star\, (x = 0 \land y \ne 0) \lor (x \ne 0 \land y = 0)$ のとき，(3.1) の不等号が成立.

$\star\, x = y = 0$ のとき，(3.1) の等号が成立.

以上により，$0 \le x < \pi/4 \ \land\ 0 \le y < \pi/4$ なる x, y に対して，(3.1) が成立.

【5.4】

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，不等式

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

の成立を示せ．ただし，n は正整数とする．

【解答】

$a>0,\ b>0,\ c>0$ に対して，

$$a^n=x_1>0, \quad b^n=x_2>0, \quad c^n=x_3>0 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

と表すとき，(4.1) は次式と同値である．

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{\frac{n+1}{n}} \leq \frac{x_1{}^{\frac{n+1}{n}}+x_2{}^{\frac{n+1}{n}}+x_3{}^{\frac{n+1}{n}}}{3} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

以下，関数 $u(x)=x^{\frac{n+1}{n}}\ (x>0)$ について考える．

$$u'(x)=\frac{n+1}{n}x^{\frac{1}{n}}>0 \ \wedge\ u''(x)=\frac{n+1}{n^2}x^{\frac{1}{n}-1}>0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

より，$u(x)$ は $x>0$ において単調増加かつ下に凸である．

● $x_1<x_2<x_3$ の場合；**(上図)**

網目部の三角形の重心 G と直下の曲線上の点 P に対して，

$$\begin{aligned} & y_{\mathrm{P}}<y_{\mathrm{G}} \\ \iff & \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{x_1{}^{\frac{n+1}{n}}+x_2{}^{\frac{n+1}{n}}+x_3{}^{\frac{n+1}{n}}}{3} \qquad \cdots\cdots(4.5) \end{aligned}$$

● $x_1=x_2<x_3$ の場合；**(下図)**

$\bigl(x_1,\ u(x_1)\bigr)$，$\bigl(x_3,\ u(x_3)\bigr)$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点 G，その直下の曲線上の点 P に対して，

$$y_{\mathrm{P}}<y_{\mathrm{G}} \iff \left(\frac{2x_1+x_3}{3}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{2x_1{}^{\frac{n+1}{n}}+x_3{}^{\frac{n+1}{n}}}{3} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

● $x_1<x_2=x_3$ の場合；上の場合と同様に，

$$y_{\mathrm{P}}<y_{\mathrm{G}} \iff \left(\frac{x_1+2x_3}{3}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{x_1{}^{\frac{n+1}{n}}+2x_3{}^{\frac{n+1}{n}}}{3} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

● $x_1=x_2=x_3$ の場合；(4.3) の等号が成立．即ち，

$$x_1{}^{\frac{n+1}{n}}=x_1{}^{\frac{n+1}{n}} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.5), (4.6), (4.7), (4.8) により，(4.3) の成立が導かれる．