【6.1】

ある容器に空の状態から始めて単位時間当たり一定の割合で水を注ぎ，底面から測った水面の高さ h が 10 になるまで続ける．このとき，水面の上昇する速さ v は，水面の高さ h の関数として，次の式で与えられる．

$$v=\frac{\sqrt{2+h}}{\log(2+h)} \quad (0\leq h\leq 10) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

水面の上昇が始まってから水面の面積が最大となるまでの時間を求めよ．

【解答】

水の流入速度 $\dfrac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}t}>0$ は一定であるから，

$$\frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}h}\times\frac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t}=(\textbf{一定}) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

ここで，水面の面積を S で表せば，

$$Sv=(\textbf{一定}) \quad \left(\because\ \frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}h}=S,\ \frac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t}=v\right) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

即ち，水面の面積 S が最大となるとき，水面の上昇速度 v は最小になる．
(1.1) を時間 t で微分して，

$$\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}t}=\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}h}\times\frac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t}=\frac{\log(2+h)-2}{2\sqrt{2+h}\big(\log(2+h)\big)^2}\times\frac{\sqrt{2+h}}{\log(2+h)}=\frac{\log(2+h)-2}{2\big(\log(2+h)\big)^3} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) により，上昇速度 v は $h=\mathbf{e}^2-2$ において極小かつ最小．
ここで，$h:0\to\mathbf{e}^2-2$ に要する時間を T で表せば，

$$T=\int_{t=0}^{t=T}\mathbf{d}t=\int_{h=0}^{h=\mathbf{e}^2-2}\frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}h}\,\mathbf{d}h=\int_0^{\mathbf{e}^2-2}\frac{\log(2+h)}{\sqrt{2+h}}\,\mathbf{d}h \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) において，$2+h=x$ と置換して，

$$T=\int_{x=2}^{x=\mathbf{e}^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathbf{d}x=\Big[2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}\Big]_2^{\mathbf{e}^2}=2\sqrt{2}\,\big(2-\log 2\big) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

【6.2】

$k \neq 0$ は実数の範囲を動くものとする．
$y = kx^4$ $(k \neq 0)$ の形をしたすべての曲線と直交し，点 $(1,\ 1)$ を通る曲線を求めよ．

【解答】

k は正負両範囲を動くので，求める曲線は $x,\ y$ 両座標軸に関して対称である．
そこで，求める曲線を第 1 象限で考え，その方程式を $y = u(x)$ と置く．
曲線 $y = u(x)$ と 4 次曲線 $y = kx^4$ との交点 x において，

$$u(x) = kx^4 \ \land \ 4kx^3 \cdot u'(x) = -1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

$x > 0$ であるから，(2.1) から k を消去して，

$$2u(x)\,u'(x) = -\frac{x}{2} \iff \{u(x)\}^2 = -\frac{x^2}{4} + C \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

ここで，$u(1) = 1$ であるから，

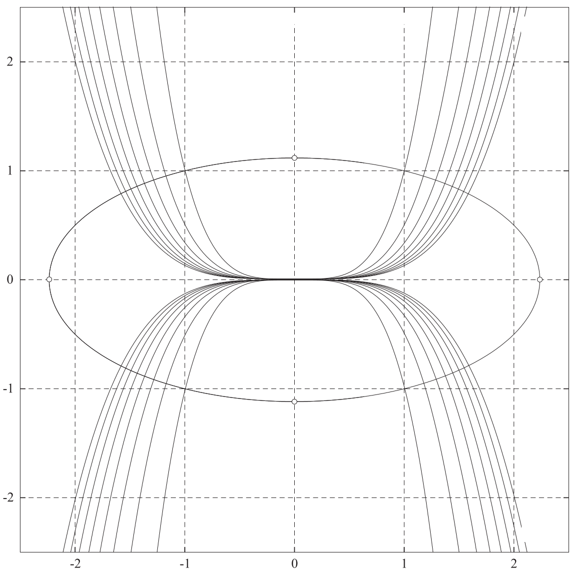
$$C = \frac{5}{4} \ \land \ u(x) > 0 \qquad \therefore \quad u(x) = \sqrt{-\frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

求める曲線の x 軸対称性，y 軸対称性を考慮して，

$$\frac{x^2}{5} + \frac{4y^2}{5} = 1 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

曲線 $y = kx^4$ と楕円 (2.4) は両座標軸上で交点を持たないので，

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5/4} = 1 \ \land \ (x,\ y) \neq \left(\pm\sqrt{5},\ 0\right) \ \land \ (x,\ y) \neq \left(0,\ \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$



【6.3】

関数 $u(x)$ が連続な導関数 $u'(x)$ を持ち，

$$\int_1^{x+1} t^2 u'(t)\ \mathbf{d}t = x(x^2+2x+3)\mathbf{e}^x \ \ \wedge\ \ u(1)=2$$

を満たすとき，$u(x)$ を求めよ．

【解答】

積分方程式

$$\int_1^{x+1} t^2 u'(t)\ \mathbf{d}t = x(x^2+2x+3)\mathbf{e}^x \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

の両辺を x で微分して，

$$(x+1)^2\, u'(x+1) = \mathbf{e}^x (x+1)^2 (x+3) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

ここで，$x+1 \neq 0$ として，

$$u'(x+1) = \mathbf{e}^x(x+3) \iff u'(t) = \mathbf{e}^{t-1}(t+2) \quad \bigl(\because\ t = x+1\bigr) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) は $t \neq 0$ で定義されるが，u' は全実数で連続なので，$t=0$ でも成り立つと考えてよい．
そこで，(3.3) の両辺を区間 $[1,\ x]$ $(\forall x)$ で積分して，

$$\begin{aligned}\int_{t=1}^{t=x} u'(t)\ \mathbf{d}t = \int_{t=1}^{t=x} (t+2)\mathbf{e}^{t-1}\ \mathbf{d}t \iff u(x)-u(1) = \Bigl[(t+1)\mathbf{e}^{t-1}\Bigr]_1^x \\ \iff u(x) = (x+1)\mathbf{e}^{x-1} - 2\cdot\mathbf{e}^0 + u(1) \qquad \cdots\cdots(3.4)\end{aligned}$$

(3.4) に $u(1)=2$ を代入して，

$$u(x) = (x+1)\mathbf{e}^{x-1} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

【6.4】

次の等式を満たす関数 $u(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ が唯一定まるための実数 a, b に関する条件を求めよ．また，そのときの $u(x)$ を決定せよ．ただし，$u(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続な関数とする．

$$u(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y)\, u(y)\, \mathbf{d}y + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y)\, u(y)\, \mathbf{d}y + \sin x + \cos x \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

【解答】

(4.1) の被積分関数に加法定理を用いて，

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\big(\sin x \cos y + \cos x \sin y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y \\ &+ \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\cos x \cos y + \sin x \sin y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y + \sin x + \cos x \qquad \cdots\cdots(4.2) \end{aligned}$$

(4.2) を整理して，

$$\begin{aligned} u(x) = &\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(a\cos y + b\sin y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y\right\} \times \sin x \\ &+ \left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(a\sin y + b\cos y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y\right\} \times \cos x \qquad \cdots\cdots(4.3) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{cases} C_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(a\cos y + b\sin y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y & \cdots\cdots(4.4) \\ C_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(a\sin y + b\cos y\big)\, u(y)\, \mathbf{d}y & \cdots\cdots(4.5) \end{cases}$$

と置けば，

$$u(x) = \left(1 + \frac{C_1}{2\pi}\right)\sin x + \left(1 + \frac{C_2}{2\pi}\right)\cos x \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

更に，

$$1 + \frac{C_1}{2\pi} = c_1 \ \wedge \ 1 + \frac{C_2}{2\pi} = c_2 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

と置けば，(4.4), (4.5), (4.6), (4.7) より，

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a\cos y + b\sin y)(c_1 \sin y + c_2 \cos y)\, \mathbf{d}y \\ &= 1 + \frac{bc_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 y\, \mathbf{d}y + \frac{ac_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 y\, \mathbf{d}y + \frac{ac_1 + bc_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin y \cos y\, \mathbf{d}y \\ &= 1 + \frac{1}{2}(bc_1 + ac_2) \qquad \cdots\cdots(4.8) \end{aligned}$$

更に，

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)(c_1 \sin y + c_2 \cos y)\, \mathbf{d}y \\ &= 1 + \frac{ac_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 y\, \mathbf{d}y + \frac{bc_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 y\, \mathbf{d}y + \frac{ac_2 + bc_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin y \cos y\, \mathbf{d}y \\ &= 1 + \frac{1}{2}(ac_1 + bc_2) \qquad \cdots\cdots(4.9) \end{aligned}$$

(4.8), (4.9) により,

$$\begin{cases} (b-2)c_1 + ac_2 = -2 \\ ac_1 + (b-2)c_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} b-2 & a \\ a & b-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

従って, $u(x)$ が唯一定まるための a, b に関する必要十分条件は,

$$\det.\begin{pmatrix} b-2 & a \\ a & b-2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff (b-2)^2 - a^2 \neq 0 \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

このとき, (4.10) は c_1, c_2 について一意に解け,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{-2}{(b-2)^2 - a^2}\begin{pmatrix} b-2-a \\ -a+b-2 \end{pmatrix} \iff c_1 = c_2 = \frac{-2}{a+b-2} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

以上より,

$$u(x) = \frac{-2}{a+b-2}\left(\sin x + \cos x\right) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$