【11.1】

行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1-x & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，$\mathbf{M}^n\ (n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

【解答】　– 直和分解 –

行列 $\mathbf{M}$ に対して，

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M}=x\ \wedge\ \det.\mathbf{M}=x-1 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

より，$\mathbf{M}$ の固有方程式

$$\lambda^2-x\lambda+x-1=0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

の解 (固有値) は，1, $x-1$ である．

• $x\neq 2$ の場合; 2 次行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ の連立方程式

$$\begin{cases} \mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{E} \\ \mathbf{P}+(x-1)\mathbf{Q}=\mathbf{M} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

を解いて，

$$\begin{cases} \mathbf{Q}=\dfrac{1}{x-2}\big(\mathbf{M}-\mathbf{E}\big)=\dfrac{1}{x-2}\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -(x-1) & -1 \end{pmatrix} & \cdots\cdots(1.4) \\ \mathbf{P}=\mathbf{E}-\mathbf{Q}=\dfrac{1}{x-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & x-1 \end{pmatrix} & \cdots\cdots(1.5) \end{cases}$$

この $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ に対して，

$$\mathrm{trace}.\mathbf{P}=\mathrm{trace}.\mathbf{Q}=1\ \wedge\ \det.\mathbf{P}=\det.\mathbf{Q}=0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

が成り立つので，

$$\mathbf{P}^n=\mathbf{P}\ \wedge\ \mathbf{Q}^n=\mathbf{Q}\quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

更に，$\mathbf{M}$ に対する Hamilton-Cayley **の定理**により，

$$\begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{Q}=(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{Q}=\dfrac{1}{(x-2)^2}\big((x-1)\mathbf{E}-\mathbf{M}\big)\big(\mathbf{M}-\mathbf{E}\big)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}\big(\mathbf{M}^2-x\mathbf{M}+(x-1)\mathbf{E}\big)=\mathbf{O} \\ \mathbf{Q}\mathbf{P}=\mathbf{Q}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})=\dfrac{1}{(x-2)^2}\big(\mathbf{M}-\mathbf{E}\big)\big((x-1)\mathbf{E}-\mathbf{M}\big)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}\big(\mathbf{M}^2-x\mathbf{M}+(x-1)\mathbf{E}\big)=\mathbf{O} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

即ち，

$$\mathbf{P}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\mathbf{P}=\mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

従って，(1.7), (1.9) により，

$$\mathbf{M}^n=\big(\mathbf{P}+(x-1)\mathbf{Q}\big)^n=\mathbf{P}+(x-1)^n\mathbf{Q}=\frac{1}{x-2}\begin{pmatrix} -1+(x-1)^{n+1} & -1+(x-1)^n \\ x-1-(x-1)^{n+1} & x-1-(x-1)^n \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

• $x=2$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

において，その固有値は 1 であるから，

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}-1\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

と置けば,

$$\mathrm{trace}.\mathbf{N}=\det.\mathbf{N}=0 \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

即ち，Hamilton-Cayley **の定理**により，

$$\mathbf{N}^n=\mathbf{O} \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) により，

$$\mathbf{M}^n=(\mathbf{N}+\mathbf{E})^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\mathbf{N}^k\mathbf{E}^{n-k}=n\mathbf{N}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

【11.2】

2 次行列 $\mathbf{M}$ と定数 p に対して，

$$\mathbf{M}^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^{n+1}-1\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

が任意の正整数 n で成り立つとき，$\mathbf{M}$, p を求めよ．

【解答】

$n=1,2,3$ に対して，(2.1) 成立のための**必要条件**を求める．

• $n=1$ の場合;

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2-1\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.2)$$

• $n=2$ の場合; (2.2) を用いて，

$$\mathbf{M}^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{M}\begin{pmatrix}p^2-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^3-1\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3), (2.2) の辺々を引いて，

$$\mathbf{M}\left(\begin{pmatrix}p^2-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p^3-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p^2-1\\1\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}\begin{pmatrix}p^2-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^3-p^2\\0\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) において，$p^2-2\neq 0$ できるので，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q\\0\end{pmatrix} \ \wedge \ q=\frac{p^3-p^2}{p^2-2} \quad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.2), (2.5) により，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2-1&q\\1&0\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix}p^2-1&q\\1&0\end{pmatrix}\times(-1)\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q&p^2-1-q\\0&1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.6)$$

• $n=3$ の場合;

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{M}\begin{pmatrix}p^3-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^4-1\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.7)$$

に対して，(2.6) を代入して，

$$\begin{pmatrix}q&p^2-1-q\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}p^3-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^4-1\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) の 1 行目を比較して，

$$q(p^3-1)+p^2-1-q=p^4-1 \ \wedge \ q=\frac{p^3-p^2}{p^2-2} \iff p^3(p-1)(p-2)=0$$
$$\iff p=0 \ \vee \ p=1 \ \vee \ p=2 \quad \cdots\cdots(2.9)$$

即ち，(2.1) 成立のためには，(2.9) が**必要**である．

次に，**十分性**について調べる．

• $p=0$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

ここで，trace.$\mathbf{M}=1 \wedge$ det.$\mathbf{M}=0$ により，

$$\mathbf{M}^n=\mathbf{M} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

このとき，$p=0$, (2.10), (2.11) により，

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

の形で (2.1) は任意の正整数 n に対して成立.

• $p=1$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

ここで，trace.$\mathbf{M}=1 \wedge$ det.$\mathbf{M}=0$ より，

$$\mathbf{M}^n=\mathbf{M} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

このとき，$p=1$, (2.13), (2.14) により，

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

の形で (2.1) は任意の正整数 n に対して成立.

• $p=2$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

ここで，ある正整数 n に対して，

$$\mathbf{M}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.17)$$

を仮定するとき，

$$\mathbf{M}^{n+1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+1}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+2}-1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.18)$$

また，$n=1$ に対して，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2-1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.19)$$

即ち，数学的帰納法により任意の正整数 n に対して (2.1) が成立.

以上の議論により，

$$\left\{p=0 \wedge \mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \vee \left\{p=1 \wedge \mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \vee \left\{p=2 \wedge \mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \qquad \cdots\cdots(2.20)$$

【11.3】

2 次行列 $\mathbf{A}$ は逆行列を持たない．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 正整数 n に対して，$\mathbf{M}^n = \mathbf{A}$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ は逆行列を持たないことを示せ．

(2) $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ とする．

$n \geq 3$ が奇数のとき，$\mathbf{M}^n = \mathbf{A}$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ が存在するための必要十分条件を求めよ．

【解答】

(1) 題意より，$\det.\mathbf{A} = 0$ である．

このとき，

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{A} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

の両辺の行列式を計算して，

$$\det.\left(\mathbf{M}^n\right) = \det.\mathbf{A} = 0 \iff \left(\det.\mathbf{M}\right)^n = 0 \iff \det.\mathbf{M} = 0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

即ち，$\mathbf{M}$ は逆行列を持たない．

(2) $\mathrm{trace}.\mathbf{M} = \tau$ と表せば，Hamilton-Cayley **の定理**により，

$$\mathbf{M}^2 = \tau\mathbf{M} \quad \left(\because\ (3.2)\right) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

このとき，帰納的に

$$\mathbf{M}^n = \tau^{n-1}\mathbf{M} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が示せるので，(3.1), (3.4) により，

$$\tau^{n-1}\mathbf{M} = \mathbf{A} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) において，$\tau \neq 0$ としてよいので，

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\tau^{n-1}}\mathbf{A} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

更に，(3.5) 両辺の trace を計算して，

$$\tau^{n-1} \times \mathrm{trace}.\mathbf{M} = \mathrm{trace}.\mathbf{A} \iff \tau^n = \tau' \iff \tau = \sqrt[n]{\tau'} \quad \left(\because\ n : \mathrm{odd}\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

ここで，$\mathrm{trace}.\mathbf{A} = \tau'$ と表した．

このとき，(3.6), (3.7) により，

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt[n]{(\tau')^{n-1}}}\mathbf{A} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

と表せるので，(3.1) を満たす $\mathbf{M}$ が存在するための**必要十分条件**は，

$$\tau' \neq 0 \iff \mathrm{trace}.\mathbf{A} \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

【11.4】

3 次行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

に対して，$\mathbf{M}^n$ を求めよ．ただし，n は正整数とする．

【解答】

$n = 2,\ 3$ について実験する．

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b-a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

更に，

$$\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b-a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 0 \\ 3b-3a^2 & -3a & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

そこで，ある正整数 n に対して，

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ c_n & -na & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

と表せることを仮定するとき，

$$\mathbf{M}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ c_n & -na & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (n+1)a & 1 & 0 \\ c_n-na^2+b & -(n+1)a & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

$\{c_n\}$ の定義により，

$$c_{n+1} = c_n - a^2 n + b \ \land \ c_1 = b \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.6) により，

$$c_n = b + \sum_{k=1}^{n-1}(-a^2 k + b) = bn - \frac{1}{2}a^2 n(n-1) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

ここで，(4.7) は $c_1 = b$ を満たすので，

(4.4), (4.7) により，すべての正整数 n に対して，

$$\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ bn-\frac{1}{2}a^2 n(n-1) & -na & 1 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$