【12.1】

2 次行列 $\mathbf{M}$, 正整数 n に対して,

$$\mathbf{M}^2 = \alpha\mathbf{M} \quad (\alpha \neq 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立つとき,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}+\mathbf{M})^k \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

を $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$ の 1 次式で表せ.

【解答】

• $\mathbf{M}$ がスカラー行列の場合; $\mathbf{M} = k\mathbf{E}$ なる実数 k が存在して,

$$\mathbf{M}^2 = \alpha\mathbf{M} \iff k^2\mathbf{E} = \alpha k\mathbf{E} \iff k(k-\alpha) = 0 \iff k = 0 \lor k = \alpha$$

$\star\, k = 0$ の場合; $\mathbf{M} = \mathbf{O}$ より,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}+\mathbf{M})^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} = n\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

$\star\, k = \alpha$ の場合; $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{E}$ より,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}+\mathbf{M})^k = \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^k\mathbf{E} = (1+\alpha)\frac{(1+\alpha)^n-1}{(1+\alpha)-1}\mathbf{E} = \frac{(1+\alpha)^{n+1}-(1+\alpha)}{\alpha}\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

• $\mathbf{M}$ がスカラー行列でない場合;

Hamilton-Cayley **の定理**と (1.1) により,

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M} = \alpha \ \land\ \det.\mathbf{M} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

このとき, $\mathbf{M}$ の固有方程式は $\lambda^2 - \alpha\lambda = 0$ であり, 固有値 0, α を用いて,

$$\alpha\mathbf{P} + 0\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{M} \ \land\ \mathbf{P}+\mathbf{Q} = \mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ を定めれば,

$$\mathbf{P} = \alpha^{-1}\mathbf{M} \ \land\ \mathbf{Q} = \mathbf{E} - \alpha^{-1}\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

と表され,

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{O} \ \land\ \mathbf{P}^n = \mathbf{P} \ \land\ \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

を満たすので,

$$\mathbf{E}+\mathbf{M} = (\alpha+1)\mathbf{P}+\mathbf{Q} \iff (\mathbf{E}+\mathbf{M})^k = (\alpha+1)^k\mathbf{P}+\mathbf{Q} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}+\mathbf{M})^k &= \sum_{k=1}^{n}\Big((\alpha+1)^k\mathbf{P}+\mathbf{Q}\Big) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha+1)^k\right)\mathbf{P}+n\mathbf{Q} \\ &= \frac{(\alpha+1)^{n+1}-(\alpha+1)}{\alpha}\mathbf{P}+n\mathbf{Q} = \frac{(\alpha+1)^{n+1}-(\alpha+1)}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\mathbf{M}+n\Big(\mathbf{E}-\frac{1}{\alpha}\mathbf{M}\Big) \\ &= \frac{(\alpha+1)^{n+1}-(\alpha+1)-n\alpha}{\alpha^2}\mathbf{M}+n\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.10)\end{aligned}$$

(1.10) において, $\mathbf{M} = \mathbf{O}$ とすれば (1.3) が得られ, $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{E}$ とすれば (1.4) が得られる.

即ち, 求めるべき結果は (1.10) である.

【12.2】

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^2 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(1) 上の方程式が実数解 x, y, z, w を持つための a に関する必要十分条件を求めよ.
(2) (1) で求めた条件の下で, x, y, z, w をそれぞれ a の式で表せ.

【解答】

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \overset{\text{put}}{=} \mathbf{X}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{put}}{=} \mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

このとき, $\mathrm{trace}.\mathbf{M} = 0$ であり, Hamilton-Cayley **の定理**により,

$$\mathbf{M}^2 = -\delta\mathbf{E} \quad \bigl(\delta = \det.\mathbf{M} = -4 - a\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(1) $\mathbf{X}$ に Hamilton-Cayley **の定理**を用いて,

$$\mathbf{X}^2 = \tau\mathbf{X} - \delta'\mathbf{E} \quad \bigl(\tau = \mathrm{trace}.\mathbf{X} \wedge \delta' = \det.\mathbf{X}\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) を (2.1) に代入して,

$$\tau\mathbf{X} - \delta'\mathbf{E} = \mathbf{M} \iff \mathbf{X} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{E} \quad \left(\alpha = \frac{1}{\tau} \wedge \beta = \frac{\delta'}{\tau}\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

ここで, $\tau = 0$ は $\mathbf{M}$ の (1.2) 成分に矛盾するので, $\tau \neq 0$ としてよい.
(2.5) を (2.1) に代入して,

$$\begin{aligned} &(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{E})^2 = \mathbf{M} \iff \alpha^2\mathbf{M}^2 + 2\alpha\beta\mathbf{M} + \beta^2\mathbf{E} = \mathbf{M} \\ &\iff (2\alpha\beta - 1)\mathbf{M} = (\delta\alpha^2 - \beta^2)\mathbf{E} \iff 2\alpha\beta - 1 = 0 \wedge \delta\alpha^2 - \beta^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(2.6) \end{aligned}$$

(2.6) より β を消去して,

$$4\alpha^4\delta = 1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) が実数解 α を持つためには, $\delta > 0$ であることが必要なので,

$$(\delta =)\ -a - 4 > 0 \iff a < -4 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

このとき,

$$\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{4\delta}} \wedge \beta = \pm\sqrt[4]{\frac{\delta}{4}} \wedge \delta = -a - 4 \quad (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

として (2.5) を満たす $\mathbf{X}$ が存在するので, 求めるべき必要十分条件は (2.8) である.
(2) (2.9) を (2.5) に代入して,

$$\mathbf{X} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{4\delta}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt[4]{4\delta}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\delta = -a - 4; \textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) の右辺を整理して,

$$\mathbf{X} = \pm\frac{1}{2b}\begin{pmatrix} b^2 + 4 & 2 \\ 2a & b^2 - 4 \end{pmatrix} \quad \left(b = \sqrt[4]{4(-a-4)}\right) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

【12.3】

2 次行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

に対して,

$$\text{trace}.\mathbf{M} = \text{trace}.\mathbf{M}^2 = -1 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

とするとき,

$$(\mathbf{M}+\mathbf{E})^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

を満たす $(x,\ y)$ を求めよ.

【解答】

(3.1) の両辺を 2 乗して,

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & b(a+c) \\ -b(a+c) & c^2-b^2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.1), (3.2), (3.4) により,

$$a+c=-1 \ \wedge \ a^2+c^2-2b^2=-1 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を整理して,

$$-1=a^2+c^2-2b^2=(a+c)^2-2ac-2b^2=1-2ac-2b^2 \qquad \therefore \ ac+b^2=1 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

更に, $\det.\mathbf{M}=ac+b^2$ であるから,

$$\det.\mathbf{M}=1 \quad \big(\because\ (3.6)\big) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.2), (3.7) により, Hamilton-Cayley **の定理**を用いて,

$$\mathbf{M}^2+\mathbf{M}+\mathbf{E}=\mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

このとき,

$$\mathbf{M}^2=-\mathbf{M}-\mathbf{E} \iff \mathbf{M}^3=-\mathbf{M}^2-\mathbf{M}=-(-\mathbf{M}-\mathbf{E})-\mathbf{M}=\mathbf{E} \iff \mathbf{M}^3=\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

であるから,

$$(\mathbf{M}+\mathbf{E})^4=(-\mathbf{M}^2)^4=\mathbf{M}^8=\mathbf{M}^2=-\mathbf{M}-\mathbf{E} \qquad \therefore\ (\mathbf{M}+\mathbf{E})^4=-\mathbf{M}-\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

更に, (3.8) により,

$$\mathbf{M}(-\mathbf{M}-\mathbf{E})=\mathbf{E} \iff (-\mathbf{M}-\mathbf{E})^{-1}=\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

従って,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}+\mathbf{E})^4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} &\iff (-\mathbf{M}-\mathbf{E})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad \big(\because\ (3.10)\big) \\
&\iff (-\mathbf{M}-\mathbf{E})^{-1}\times(-\mathbf{M}-\mathbf{E})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{M}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad \big(\because\ (3.11)\big) \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab-ab \\ -b^2-ac \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

即ち,

$$(x,\ y)=(0,\ -1) \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

【12.4】

3 次行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

また, 3 次行列の列 $\{\mathbf{M}_n\}$ を次の式で定義する.

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{E},\ \mathbf{M}_2=\mathbf{A}+\mathbf{B},\quad \mathbf{M}_{n+2}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{BA}\cdot\mathbf{M}_n\ \ (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(1) $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{B}^n$, $\mathbf{AB}$ を求めよ.　(2) $\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{AM}_n$ を求めよ.　(3) $\mathbf{M}_n$ を求めよ.

ただし, n を正の整数とする.

【解答】

(1) (4.1) により,

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

更に,

$$\mathbf{B}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\mathbf{B} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

更に,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.3), (4.4), (4.5) により,

$$\mathbf{A}^n=\begin{cases}\mathbf{A} & (n:\text{odd})\\ \mathbf{E} & (n:\text{even})\end{cases},\quad \mathbf{B}^n=\mathbf{B}\ \ (n:\text{正整数}),\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(2) (4.2)に より,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{n+2}-\mathbf{AM}_{n+1}&=\mathbf{B}(\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{AM}_n)\\ &=\mathbf{B}^2(\mathbf{M}_n-\mathbf{AM}_{n-1})=\cdots=\mathbf{B}^n(\mathbf{M}_2-\mathbf{AM}_1)\\ &=\mathbf{B}^n(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{E})=\mathbf{B}^{n+1}\ \ (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.6), (4.7) により,

$$\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{AM}_n=\mathbf{B}\quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(3) (4.8) を繰り返し用いて,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{A}\mathbf{M}_n&=\mathbf{B}\\ \mathbf{A}\mathbf{M}_n-\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{n-1}&=\mathbf{A}\mathbf{B}\\ \mathbf{A}^2\mathbf{M}_{n-1}-\mathbf{A}^3\mathbf{M}_{n-2}&=\mathbf{A}^2\mathbf{B}\\ &\vdots\\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{M}_2-\mathbf{A}^n\mathbf{M}_1&=\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.9) の辺々を加えて,

$$\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{A}^n\mathbf{M}_1=(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1})\mathbf{B} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.10), (4.8) の辺々を引いて,

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_n-\mathbf{A}^n=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1})\mathbf{B} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(4.11) の両辺に左から $\mathbf{A}$ を乗じて,

$$\mathbf{M}_n=\mathbf{A}^{n+1}+(\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\cdots+\mathbf{A}^n)\mathbf{B} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

• $n=2m\ (m=1,2,\cdots)$ の場合;

$$\mathbf{M}_{2m}=\mathbf{A}+\big(m\mathbf{E}+(m-1)\mathbf{A}\big)\mathbf{B}$$

$$\iff \mathbf{M}_{2m}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}+(m-1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M}_{2m}=\begin{pmatrix}2m&0&0\\0&2m&0\\0&2m+2&-1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

• $n=2m-1\ (m=1,2,\cdots)$ の場合;

$$\mathbf{M}_{2m-1}=\mathbf{E}+(m-1)\big(\mathbf{E}+\mathbf{A}\big)\mathbf{B}$$

$$\iff \mathbf{M}_{2m-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(m-1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}+(m-1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M}_{2m-1}=\begin{pmatrix}2m-1&0&0\\0&2m-1&0\\0&2m-2&1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

(4.13), (4.14) により,

$$\mathbf{M}_n=\begin{pmatrix}n&0&0\\0&n&0\\0&n+2&-1\end{pmatrix}\ (n:\text{even}),\qquad \mathbf{M}_n=\begin{pmatrix}n&0&0\\0&n&0\\0&n-1&1\end{pmatrix}\ (n:\text{odd}) \qquad \cdots\cdots(4.15)$$