【13.1】

双曲線

$$\mathfrak{C}_1 : ax^2 - by^2 = 1, \quad \mathfrak{C}_2 : ax^2 - by^2 = -1 \quad (a > 0,\, b > 0)$$

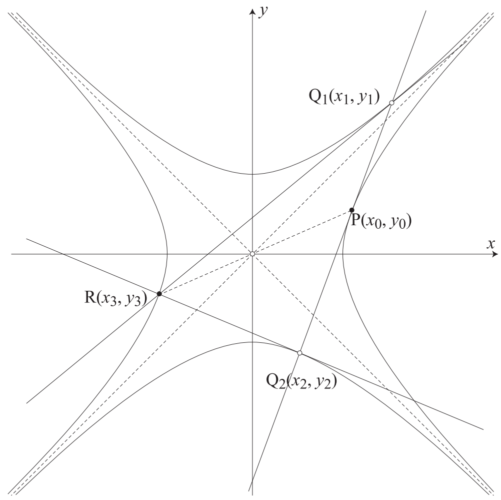
を考える.

$\mathfrak{C}_1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ $(x_0 > 0)$ に対して，P における $\mathfrak{C}_1$ の接線と $\mathfrak{C}_2$ との交点を Q_1, Q_2 とする.

更に，$\mathfrak{C}_2$ 上の点 Q_1, Q_2 における 2 接線の交点を R とする.

P が $\mathfrak{C}_1$ の $x > 0$ の部分を動くとき，R の軌跡の方程式を求めよ.

【解答】



$\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ $(x_0 > 0)$ における $\mathfrak{C}_1$ の接線は,

$$ax_0\,x - by_0\,y = 1 \quad (x_0 > 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

$\mathrm{Q}_1(x_1,\, y_1)$, $\mathrm{Q}_2(x_2,\, y_2)$ における $\mathfrak{C}_2$ の接線は,

$$\begin{cases} ax_1\,x - by_1\,y = -1 & \cdots\cdots(1.2) \\ ax_2\,x - by_2\,y = -1 & \cdots\cdots(1.3) \end{cases}$$

(1.2), (1.3) が $\mathrm{R}(x_3, y_3)$ で交わるとき,

$$\begin{cases} ax_1x_3 - by_1y_3 = -1 \\ ax_2x_3 - by_2y_3 = -1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

が同時に成り立ち，直線

$$a(-x_3)x - b(-y_3)y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

が 2 点 Q_1, Q_2 を同時に通ることを意味する.

従って，(1.5), (1.1) は同一直線と考えられ,

$$-x_3 = x_0\,(>0) \ \wedge \ -y_3 = y_0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

更に，$\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ は $\mathfrak{C}_1$ 上にあるから,

$$a{x_0}^2 - b{y_0}^2 = 1 \ \wedge \ x_0 > 0 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.6), (1.7) により,

$$a{x_3}^2 - b{y_3}^2 = 1 \ \wedge \ x_3 < 0 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

従って，R の軌跡は $\mathfrak{C}_1$ の左側の部分，即ち,

$$ax^2 - by^2 = 1 \ \wedge \ x < 0 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

【13.2】

長軸の長さ 4, 短軸の長さ 2 の楕円に囲まれた領域を $\mathfrak{D}_1$ とする.
この楕円の短軸の方向に領域 $\mathfrak{D}_1$ を

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\ \left(=2\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

だけ平行移動して得られる領域を $\mathfrak{D}_2$ とするとき,
$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ の共通部分の領域 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\cap\mathfrak{D}_2$ の面積を求めよ.

【解答】

$\mathfrak{D}_1$ の境界の楕円を

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

$\mathfrak{D}_2$ の境界の楕円を

$$\frac{x^2}{4}+\left(y-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

として一般性を失わない.
このとき, 変換

$$\frac{x}{2}=x' \ \wedge\ y=y' \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

による (2.1), (2.2) の像は,

$$\begin{cases} (x')^2+(y')^2=1 & \cdots\cdots(2.4) \\ (x')^2+\left(y'-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 & \cdots\cdots(2.5) \end{cases}$$

Fig.1

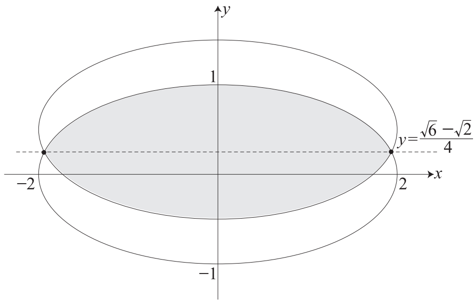


Fig.2

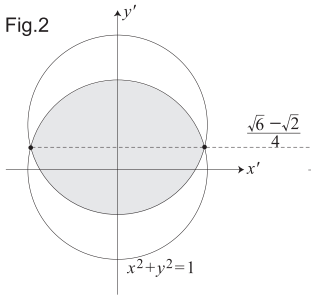
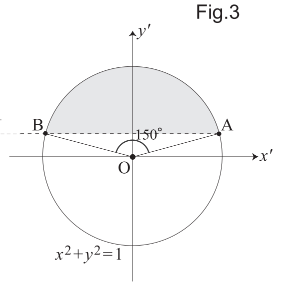


Fig.3



であり, 題意の共通領域 $\mathfrak{D}$ の面積 (Fig.1) は, (2.4), (2.5) の囲む領域の面積 (Fig.2) の 2 倍である.
ここで, (2.4), (2.5) の交点の y' 座標は,

$$(y')^2-\left(y'-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=0 \iff y'=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sin\frac{\pi}{12} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

であり, Fig.3 において,

$$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=15^\circ \ \wedge\ \angle\mathrm{AOB}=150^\circ \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

従って, Fig.2 網目部の面積は,

$$2\times\left(\pi\times\frac{150^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin150^\circ\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

即ち, Fig.1 網目部の面積は,

$$\frac{5\pi}{3}-1 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

【13.3】

xy 平面上において，2 定点

$$\mathrm{F}_1(a,\ a),\quad \mathrm{F}_2(-a,\ -a)\ \ (a>0) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

からの距離の積が一定値 $2a^2$ となる点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする．

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関する $\mathfrak{C}$ の方程式を求めよ．

(2) 原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関する $\mathfrak{C}$ の方程式を求めよ．

(3) $\mathfrak{C}$ の囲む閉領域の面積を求めよ．

(4) 反転

$$x' = \frac{2a^2x}{x^2+y^2},\quad y' = \frac{2a^2y}{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

による $\mathfrak{C}$ の像 $\mathfrak{C}'$ の方程式を $x',\ y'$ の関係式の形で導け．

【解説】

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ と置けば，

$$\begin{cases} \mathrm{PF_1}^2 = (x-a)^2+(y-a)^2 = x^2+y^2+2a^2-2a(x+y) \\ \mathrm{PF_2}^2 = (x+a)^2+(y+a)^2 = x^2+y^2+2a^2+2a(x+y) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

このとき，

$$\mathrm{PF_1}^2\times\mathrm{PF_2}^2 = (2a^2)^2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

より，

$$(x^2+y^2+2a^2)^2-4a^2(x+y)^2 = 4a^4 \iff (x^2+y^2)^2 = 8a^2xy \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を (3.5) に代入して，

$$r^4 = 4a^2r^2\sin2\theta \iff r^2 = 4a^2\sin2\theta\ \vee\ r=0 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

ここで，(3.6) の第 1 式は，

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\ \vee\ \pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

で定義されると考えてよく，
第 2 式は $\theta=0,\ \pi$ として第 1 式に含まれるので，

$$r^2 = 4a^2\sin2\theta \iff r = 2a\sqrt{\sin2\theta} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3) (3.5) により，$\mathfrak{C}$ は直線 $y=x$ に関して対称であり，原点対称でもあるから，

$$4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,\mathbf{d}\theta = 8a^2\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2\theta\,\mathbf{d}\theta = 8a^2\times\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

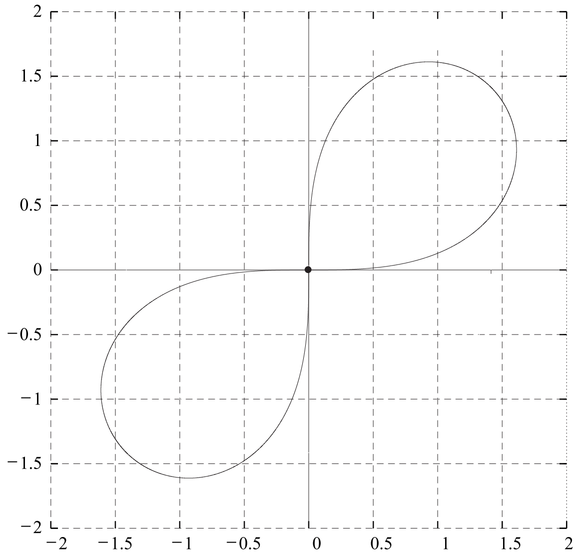
(4) (3.2) を $x,\ y$ について解いて，

$$x = \frac{2a^2x'}{(x')^2+(y')^2},\quad y = \frac{2a^2y'}{(x')^2+(y')^2} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) を (3.5) に代入して，

$$\left(\frac{4a^4(x')^2}{((x')^2+(y')^2)^2}+\frac{4a^4(y')^2}{((x')^2+(y')^2)^2}\right)^2 = 8a^2\times\frac{2a^2x'}{(x')^2+(y')^2}\times\frac{2a^2y'}{(x')^2+(y')^2} \iff x'y' = \frac{1}{2}a^2 \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

[Note]　$a=1$ の場合のグラフを次頁に記す．


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

【13.4】

座標軸上にない点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を通る曲線

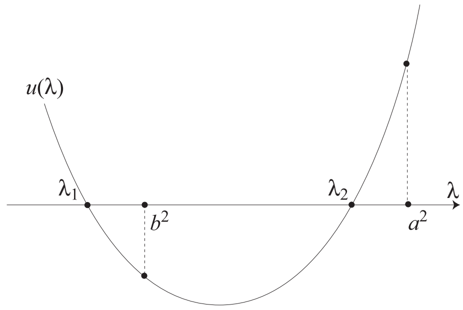
$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \quad (a>b>0,\ \lambda\neq b^2,\ \lambda<a^2) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

は 2 個存在し，それぞれ楕円と双曲線であることを示せ.
また，2 曲線は P において直交することを示せ.

【解答】

(4.1) が $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を通るとき,

$$\frac{{x_0}^2}{a^2-\lambda}+\frac{{y_0}^2}{b^2-\lambda}=1 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$



(4.2) を (同値) 変形して,

$$(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)+{y_0}^2(\lambda-a^2)+{x_0}^2(\lambda-b^2)=0 \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) の左辺を $u(\lambda)$ と表せば,

$$u(a^2)={x_0}^2(a^2-b^2)>0 \ \wedge\ u(b^2)=-{y_0}^2(a^2-b^2)<0 \quad \left(\because\ a^2>b^2>0\right) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで，$u(\lambda)=0$ の解を $\lambda_1,\, \lambda_2$ $(\lambda_1<\lambda_2)$ と表せば，$u(\lambda)$ のグラフより,

$$\lambda_1<b^2<\lambda_2<a^2 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

• $\lambda=\lambda_1$ の場合;

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}=1 \quad \left(a^2-\lambda_1>0 \ \wedge\ b^2-\lambda_1>0\right) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

は $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を通る**楕円**を表す.

• $\lambda=\lambda_2$ の場合;

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}-\frac{y^2}{\lambda_2-b^2}=1 \quad \left(a^2-\lambda_2>0 \ \wedge\ \lambda_2-b^2>0\right) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

は $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を通る**双曲線**を表す.

次に，楕円上の点 P における接線とその法線ベクトルは,

$$\frac{x_0}{a^2-\lambda_1}x+\frac{y_0}{b^2-\lambda_1}y=1, \quad \overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_0}{a^2-\lambda_1}\\ \dfrac{y_0}{b^2-\lambda_1}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

更に，双曲線上の点 P における接線とその法線ベクトルは,

$$\frac{x_0}{a^2-\lambda_2}x-\frac{y_0}{\lambda_2-b^2}y=1, \quad \overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_0}{a^2-\lambda_2}\\ -\dfrac{y_0}{\lambda_2-b^2}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

このとき，(4.8), (4.9) により，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{{x_0}^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}+\frac{{y_0}^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}$$
$$=\frac{{x_0}^2}{a^4-(\lambda_1+\lambda_2)a^2+\lambda_1\lambda_2}+\frac{{y_0}^2}{b^4-(\lambda_1+\lambda_2)b^2+\lambda_1\lambda_2}\quad\cdots\cdots(4.10)$$

ここで，2 次方程式

$$\lambda^2-\left(a^2+b^2-{x_0}^2-{y_0}^2\right)\lambda+a^2b^2-a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2=0\quad\cdots\cdots(4.3)$$

における**解と係数の関係**により，

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a^2+b^2-{x_0}^2-{y_0}^2\\ \lambda_1\lambda_2=a^2b^2-a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2\end{cases}\quad\cdots\cdots(4.11)$$

(4.11) を用いて (4.10) を書き換えれば，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{{x_0}^2}{a^4-(a^2+b^2-{x_0}^2-{y_0}^2)a^2+a^2b^2-a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2}$$
$$+\frac{{y_0}^2}{b^4-(a^2+b^2-{x_0}^2-{y_0}^2)b^2+a^2b^2-a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2}$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2-a^2}=0\quad\cdots\cdots(4.12)$$

(4.12) により，楕円と双曲線は P において直交する．

[Note]　共焦点の楕円と双曲線が交点において直交するという事実はほとんど自明である．右図のように P における楕円，双曲線の接線を $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ とすれば，直線 FP, F′P のなす角について，

$$\begin{cases}\angle\mathrm{F'P}\mathfrak{L}_1=\angle\mathrm{FP}\mathfrak{L}_1=\omega\\ \angle\mathrm{F'PQ}=\angle\mathrm{FPQ}=\theta\\ 2\omega+2\theta=\pi\end{cases}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{QPF'}+\angle\mathrm{F'P}\mathfrak{L}_1=\theta+\omega=\frac{\pi}{2}$$

即ち，$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ は P において直交する．