【14.1】

xy 平面上の双曲線

$$\mathfrak{H}: x=t+\frac{1}{t},\ y=t-\frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

に関して, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathfrak{H}$ の 2 個の焦点の座標, 漸近線の方程式を求めよ.

(2) $t>1$ とする. $\mathfrak{H}$ 上の点

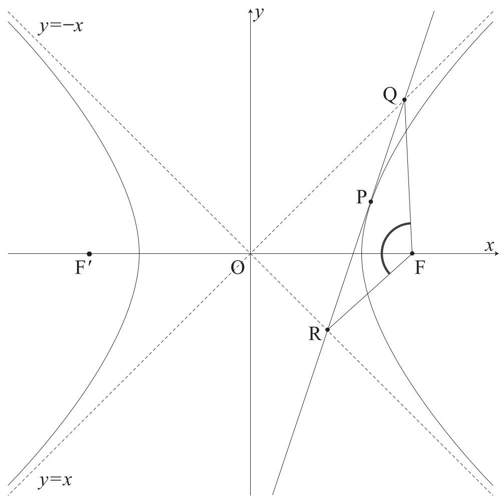
$$\mathrm{P}\left(t+\frac{1}{t},\, t-\frac{1}{t}\right)$$

における接線と 2 本の漸近線との交点を Q, R とする.

このとき, $\angle\mathrm{QFR}$ は一定であることを示し, その大きさを求めよ.

ただし, F は右側の焦点を表し, Q は上側の交点を表すものとする.

【解答】



(1) $\mathfrak{H}$ の媒介変数表示により,

$$x^2-y^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=4 \iff \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots(1.1)$$

(1.1) により,

$$\textbf{焦点}: \mathrm{F}\bigl(2\sqrt{2},\, 0\bigr),\ \mathrm{F}'\bigl(-2\sqrt{2},\, 0\bigr) \quad \textbf{漸近線}: y=\pm x \quad \cdots\cdots(1.2)$$

(2) P における $\mathfrak{H}$ の接線の方程式は,

$$\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)x-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)y=1 \quad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) と漸近線 $y=\pm x$ との交点 Q, R は,

$$\mathrm{Q}(2t,\, 2t), \quad \mathrm{R}\left(\frac{2}{t},\, -\frac{2}{t}\right) \quad (\because\ t>1) \quad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=\begin{pmatrix}2t-2\sqrt{2}\\ 2t\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{FR}}=\begin{pmatrix}2/t-2\sqrt{2}\\ -2/t\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) により,

$$\begin{cases} \bigl|\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\bigr|=\sqrt{8\bigl(t^2-\sqrt{2}t+1\bigr)} \\ \bigl|\overrightarrow{\mathrm{FR}}\bigr|=\dfrac{1}{t}\sqrt{8\bigl(t^2-\sqrt{2}t+1\bigr)} \end{cases} \quad \overrightarrow{\mathrm{FQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FR}}=-\frac{4\sqrt{2}\,\bigl(t^2-\sqrt{2}t+1\bigr)}{t} \quad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) により,

$$\cos\angle\mathrm{QFR}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FR}}}{\bigl|\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\bigr|\bigl|\overrightarrow{\mathrm{FR}}\bigr|}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \angle\mathrm{QFR}=\frac{3\pi}{4} \quad \cdots\cdots(1.7)$$

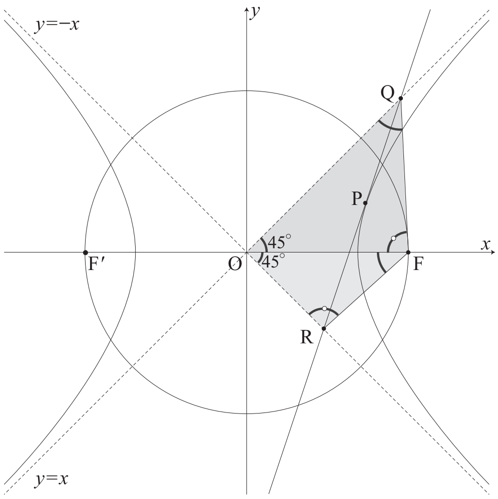
【別解】　– 複素反転 –

(2) 題意の図形を複素平面上で考え，$\mathfrak{H}$ の焦点 F, F′ を通る円 $|z|=2\sqrt{2}$ を反転円とする反転 $w=8/z$ によって点 Q$(2t,\ 2t)$ が点 R$(2/t,\ -2/t)$ に移り合うことに注目すると，

$$\begin{cases} \mathrm{OQ}:\mathrm{OF}=\mathrm{OF}:\mathrm{OR}=t:1\ (t>1) \\ \angle\mathrm{QOF}=\angle\mathrm{FOR}=45^\circ \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

(1.8) により，三角形 QOF, FOR は相似であるので，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{QFR}&=\angle\mathrm{QFO}+\angle\mathrm{RFO}=\angle\mathrm{FRO}+\angle\mathrm{RFO}\\&=180^\circ-\angle\mathrm{ROF}=180^\circ-45^\circ=135^\circ\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$



[Note]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

上の任意の点

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right) \quad \left(\theta\neq\pm\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

における接線

$$\frac{1}{a\cos\theta}x-\frac{\sin\theta}{b\cos\theta}y=1 \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

と漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ との交点は，

$$\mathrm{Q}_1\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right),\quad \mathrm{Q}_2\left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\ \frac{-b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right) \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\frac{|\cos\theta|}{1-\sin\theta}\ \wedge\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\frac{|\cos\theta|}{1+\sin\theta} \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) により，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}\right|=a^2+b^2 \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

(1.16) および $\angle\mathrm{Q_1OF}=\angle\mathrm{Q_2OF}$ により，
Q_1, Q_2 は反転半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の**複素反転**

$$w=\frac{a^2+b^2}{z} \iff x'=\frac{(a^2+b^2)x}{x^2+y^2}\wedge y'=-\frac{(a^2+b^2)y}{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

により相互に移り合い，反転円

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \iff z^2=a^2+b^2 \iff x^2+y^2=a^2+b^2 \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

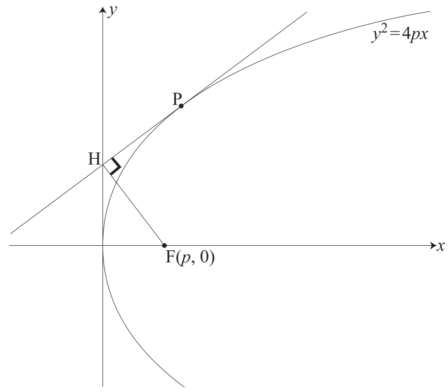
は双曲線の焦点

$$\mathrm{F}\big(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\big),\quad \mathrm{F}'\big(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\big) \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

を通過する．

【14.2】

放物線 $\mathfrak{C}: y^2 = 4px\ (p > 0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ から $\mathfrak{C}$ の任意の接線に下ろした垂線の足 H の軌跡を求めよ. また, $\mathfrak{C}$ の異なる 3 本の接線の作る三角形の外接円は常に焦点 F を通ることを示せ.



【解答】

放物線 $\mathfrak{C}: y^2 = 4px\ (p > 0)$ 上の任意の点

$$\mathrm{P}\left(\frac{t^2}{4p},\ t\right) \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

における放物線 $\mathfrak{C}$ の接線の方程式は,

$$4px - 2ty + t^2 = 0 \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) と直交し, 焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を通る直線は,

$$tx + 2py - tp = 0 \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

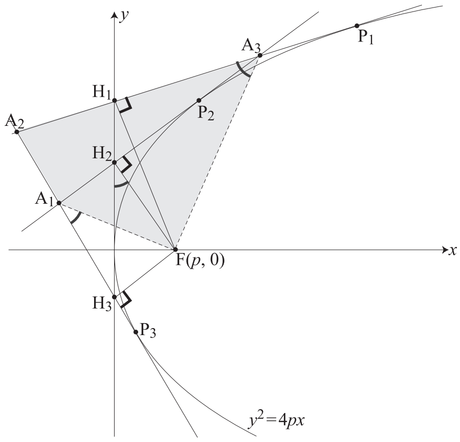
(2.2), (2.3) の交点 H の座標は,

$$\mathrm{H}\left(0,\ \frac{t}{2}\right) \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

即ち, 垂線の足 H の軌跡は,

$$x = 0 \ \wedge\ -\infty < y < \infty \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

即ち, y 軸全体である. **(上図)**



$\mathfrak{C}$ 上の 3 点 $\mathrm{P}_k\ (k = 1, 2, 3)$ における 3 本の接線の交点を $\mathrm{A}_k\ (k = 1, 2, 3)$ で表す. **(下図)**

三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の外接円が F を通るとは, 四角形 $\mathrm{A_1A_2A_3F}$ が円に内接することであるから,

$$\angle\mathrm{FA_3A_2} + \angle\mathrm{FA_1A_2} = 180^\circ \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

の成立を示せばよい.

$\angle\mathrm{A_3H_1F} = \angle\mathrm{A_3H_2F} = 90^\circ$ より, 四角形 $\mathrm{A_3H_1H_2F}$ は円に内接するので,

$$\angle\mathrm{FA_3H_1(A_2)} = \angle\mathrm{FH_2H_3} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

また, $\angle\mathrm{A_1H_2F} = \angle\mathrm{A_1H_3F} = 90^\circ$ より, 四角形 $\mathrm{FH_2A_1H_3}$ も円に内接するので,
この外接円における円周角の定理より,

$$\angle\mathrm{FH_2H_3} = \angle\mathrm{FA_1H_3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.7), (2.8) により,

$$\angle\mathrm{FA_3H_1(A_2)} = \angle\mathrm{FH_2H_3} = \angle\mathrm{FA_1H_3} \iff \angle\mathrm{FA_3A_2} = \angle\mathrm{FA_1H_3} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.9), (2.6) は同値なので題意は示された.

【14.3】

$0<a<1$ なる定数 a に対して，次の方程式で与えられる曲線 $\mathfrak{C}$ を考える．

$$\mathfrak{C} : a^2(x^2+y^2) = (x^2+y^2-x)^2 \quad (0<a<1) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(1) $\mathfrak{C}$ の極方程式を求めよ．

(2) $\mathfrak{C}$ と x 軸および y 軸との交点の座標を求め，$\mathfrak{C}$ の概形を描け．

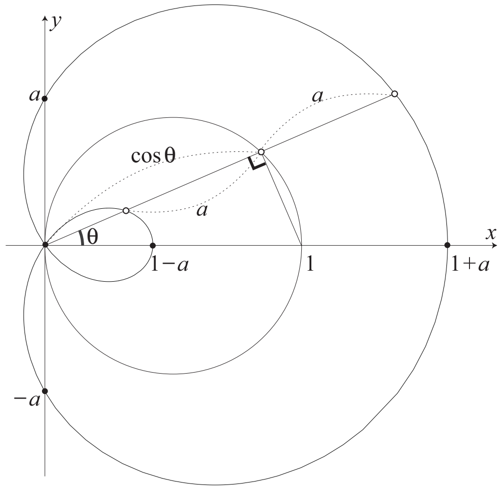
(3) $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，$\mathfrak{C}$ 上の点の x 座標の最大値 · 最小値，y 座標の最大値 · 最小値を求めよ．

【解答】

(1) (3.1) に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入して，

$$a^2r^2=(r^2-r\cos\theta)^2 \iff a^2r^2=r^2(r-\cos\theta)^2 \iff r=0 \ \vee\ a^2=(r-\cos\theta)^2$$
$$\iff r=0 \ \vee\ r-\cos\theta=\pm a \iff r=0 \ \vee\ r=\cos\theta\pm a \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(2) 方程式 $r=\cos\theta\pm a$ に対して，



$$\begin{cases} \theta=0 & \cdots\cdots & r=1\pm a \\ \theta=\pi & \cdots\cdots & r=-1\pm a \\ \theta=\pm\pi/2 & \cdots\cdots & r=\pm a \end{cases}$$

更に，$r=0$ を含め，(3.1) と各座標軸との交点は，

$$(0,\ 0),\ (1\pm a,\ 0),\ (0,\ \pm a) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

通過点の座標 (3.3) および $\cos\theta$ の増減により，
グラフの概形は**右図**の通り．

(3) ● $r=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の場合;

$$x=r\cos\theta=\cos^2\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta=\left(\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

$-1\leq\cos\theta\leq 1$ より，

$$-\frac{1}{12}\leq x\leq 1+\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

更に，

$$y=r\sin\theta=\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) により，

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\theta}=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta=2\cos^2\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-1=2\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) により，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ における関数 $y(\theta)$ の増減表は以下の通り．

θ	0	$\cdots$	ω	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$2\pi-\omega$	$\cdots$	2π
$\mathbf{d}y/\mathbf{d}\theta$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{12}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	0

ここで，

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \wedge \ 0 < \omega < \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

増減表により，

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq y \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

• $r = \cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の場合;

$$\begin{cases} x = \cos^2\theta - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta = \cos^2(\theta+\pi) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta+\pi) \\ y = \sin\theta\cos\theta - \dfrac{1}{3}\sin\theta = \sin(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta+\pi) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) により，$r = \cos\theta \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は同一曲線である．
従って，(3.5), (3.9) により，

$$-\frac{1}{12} \leq x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ \wedge \ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq y \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

[Note] 曲線 $r = \cos\theta \pm a$ は同一曲線を表す．何故なら，極座標表示において，

$$(r,\ \theta) = (-r,\ \theta+\pi)$$

[Note] 曲線 $r = r(\theta)$ に対して，面積，弧長，回転体の体積の公式は以下の通り;

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \,\mathbf{d}\theta, \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathbf{d}\theta, \quad \frac{2\pi}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \sin\theta \,\mathbf{d}\theta, \quad \frac{2\pi}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \cos\theta \,\mathbf{d}\theta$$

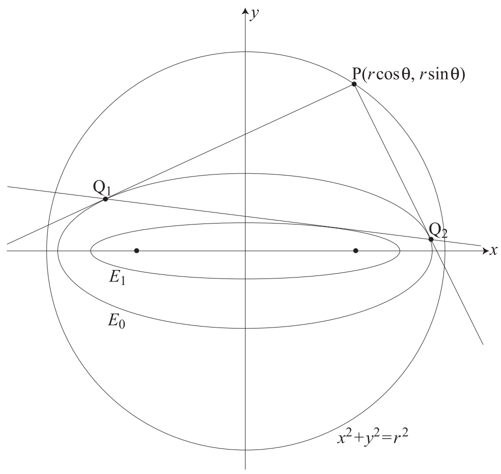
【14.4】

楕円 $\mathfrak{E}_0$ と円 $\mathfrak{C}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{E}_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0), \quad \mathfrak{C} : x^2+y^2=r^2 \ (r>a)$$

$\mathfrak{C}$ 上の点 P から $\mathfrak{E}_0$ に引いた 2 本の接線と $\mathfrak{E}_0$ との接点を Q_1, Q_2 とする．
P が $\mathfrak{C}$ 上を動くとき，直線 Q_1Q_2 は $\mathfrak{E}_0$ と焦点を共有するある楕円 $\mathfrak{E}_1$ に常に接する．
このとき，r を a, b の式で表し，この楕円 $\mathfrak{E}_1$ の方程式を求めよ．

【解答】



$\mathfrak{C}$ 上の点 $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ を極とする $\mathfrak{E}_0$ の極線は,

$$\frac{r\cos\theta}{a^2}x+\frac{r\sin\theta}{b^2}y=1 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

一方，$\mathfrak{E}_0$ と焦点を共有する楕円 $\mathfrak{E}_1$ は,

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \quad \left(0<\lambda<b^2<a^2\right) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

題意より，(4.1), (4.2) が接する条件を求めればよい．
(4.2) を単位円 $(x')^2+(y')^2=1$ に移す変換

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-\lambda}}=x' \ \wedge \ \frac{y}{\sqrt{b^2-\lambda}}=y' \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

によって (4.1) が移る直線は,

$$\frac{r\cos\theta\sqrt{a^2-\lambda}}{a^2}x'+\frac{r\sin\theta\sqrt{b^2-\lambda}}{b^2}y'=1 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

単位円 $(x')^2+(y')^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と (4.4) との距離に関して,

$$\frac{r^2\cos^2\theta\,(a^2-\lambda)}{a^4}+\frac{r^2\sin^2\theta\,(b^2-\lambda)}{b^4}=1 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

即ち，(4.5) の成立が (4.1), (4.2) が接する必要十分条件である．
ここで，P は $\mathfrak{C}$ 上任意なので，(4.5) が任意の θ に対して成り立つと考えて,

$$\begin{cases} \theta=0 & \cdots\cdots \quad a^4=r^2(a^2-\lambda) \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots \quad b^4=r^2(b^2-\lambda) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

即ち，(4.6) が同時に成り立つことが必要である．
このとき，(4.6) 両式の差をとり,

$$r^2=a^2+b^2 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.7) を (4.6) の何れかに代入して,

$$\lambda=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.7), (4.8) が同時に成り立つとき，任意の θ に対して (4.5) が成り立つことは明らかなので,
(4.7) ∧ (4.8) が題意成立のための必要十分条件である．即ち，求める共焦点楕円の方程式は．

$$\frac{x^2}{\dfrac{a^4}{a^2+b^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{b^4}{a^2+b^2}}=1 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

【別解】 – 包絡線の利用 –

題意の楕円 $\mathfrak{E}_1$ は極線 (4.1) の通過領域の**包絡線**なので，(4.1) を θ の方程式と考えて，

$$\frac{r\cos\theta}{a^2}x+\frac{r\sin\theta}{b^2}y=1 \iff b^2rx\cdot\cos\theta+a^2ry\cdot\sin\theta=a^2b^2$$

$$\iff \sin(\theta+\omega)=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4r^2y^2+b^4r^2x^2}} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.10) において，$0\leq\theta<2\pi$ であり，右辺の符号を考慮すれば，

$$(0<)\ \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4r^2y^2+b^4r^2x^2}}\leq 1 \iff a^4r^2y^2+b^4r^2x^2\geq a^4b^4 \iff \frac{x^2}{a^4/r^2}+\frac{y^2}{b^4/r^2}\geq 1 \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

即ち，(4.11) が (4.1) の通過領域であり，その境界 (包絡線) が求める $\mathfrak{E}_1$ である．
ここで，(4.11) の境界の楕円の焦点に関して，

$$\frac{a^4}{r^2}-\frac{b^4}{r^2}=a^2-b^2 \iff r^2=a^2+b^2 \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

の成立が $\mathfrak{E}_0$ と共焦点となる必要十分条件である．
即ち，求める $\mathfrak{E}_1$ は，

$$\frac{x^2}{\dfrac{a^4}{a^2+b^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{b^4}{a^2+b^2}}=1 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$