【15.1】

1 次変換 T は任意の直交する 2 直線を直交する 2 直線に移し，点 $(\sqrt{3},\,1)$ を点 $(2,\,2\sqrt{3})$ に移す．このとき，T の表現行列 $\mathbf{M}$ を求めよ．

【解答】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置き，直交する 2 直線の方向ベクトルを

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と表す．ここで，$p,\,q$ は $(p,\,q)\neq(0,\,0)$ なる任意の実数とする．

題意より，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\cdot\mathbf{M}\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -aq+bp \\ -cq+dp \end{pmatrix}=0$$
$$\iff (ap+bq)(-aq+bp)+(cp+dq)(-cq+dp)=0$$
$$\iff (ab+cd)p^2-(a^2+c^2-b^2-d^2)pq-(ab+cd)q^2=0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

ここで，$p,\,q$ は任意であるから，

$$\begin{cases} ab+cd=0 & \cdots\cdots(1.3) \\ a^2+c^2=b^2+d^2 & \cdots\cdots(1.4) \end{cases}$$

(1.4) において，$a^2+c^2=b^2+d^2=0$ とすると，

$$a=b=c=d=0 \iff \mathbf{M}=\mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

即ち，T によってすべての図形が原点に移るので題意に反する．

$$\therefore\ a^2+c^2=b^2+d^2>0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

このとき，(1.3), (1.4) により，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

なる 2 ベクトルは**垂直**，**等長**なので，$(b,\,d)$ は $(a,\,c)$ を $\pm 90^\circ$ 回転して得られる．即ち，

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\quad(\textbf{複号同順}) \iff \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

このとき，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\cdots\cdots(1.9)\ \vee\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}\cdots\cdots(1.10)$$

• (1.9) の場合;

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \sqrt{3}a-c \\ \sqrt{3}c+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

• (1.10) の場合;

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \sqrt{3}a+c \\ \sqrt{3}c-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

(1.11), (1.12) により，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\ \vee\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

ARISTOS

【15.2】

$a^2+b^2 \neq 0$ なる実数 $a,\ b$ に対して,

$$\mathbf{M}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置き, 行列 $\mathbf{M}^3,\ (\mathbf{E}-\mathbf{M})^2$ の表す 1 次変換による点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の像をそれぞれ Q, R とする.
ただし, $\mathrm{Q} \neq \mathrm{P},\ \mathrm{R} \neq \mathrm{P}$ とする.
(1) $\angle\mathrm{QPR}$ の大きさを求めよ.　(2) 三角形 PQR の面積を $a,\ b,\ x,\ y$ の式で表せ.

【解答】

(1) $\mathrm{trace}.\mathbf{M}=1,\ \det.\mathbf{M}=0$ より,

$$\mathbf{M}^2=\mathbf{M} \iff \mathbf{M}^n=\mathbf{M} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\mathbf{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

更に, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の成分は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\mathbf{E}-\mathbf{M})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{bx-ay}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.2), (2.3) により,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x+aby+b^2x-aby \\ abx+b^2y-abx+a^y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

即ち, 四角形 OQPR は平行四辺形であり, $\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{QOR}$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\frac{bx-ay}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}=0 \iff \angle\mathrm{QOR}=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

即ち, $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ である. (**下図**)

(2) $\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OQR}$ であるから,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\frac{1}{2}\times\frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(ax+by)(bx-ay)|}{2(a^2+b^2)} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

【Note】　– 正射影ベクトル –

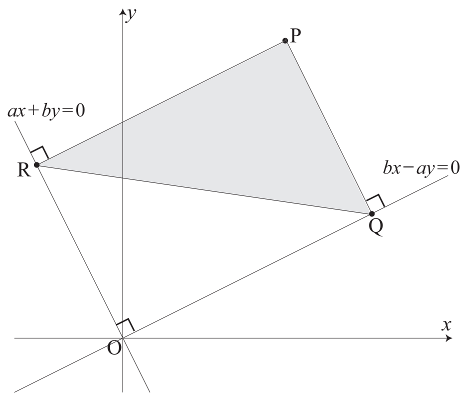
ベクトル

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

に対して,

$$\frac{\vec{d}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{d}|^2}\times\vec{d}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{d}$ への正射影ベクトルであり, (2.2), (2.8) により,
Q は P の直線 $bx-ay=0$ への垂線の足であり,
R は P の直線 $ax+by=0$ への垂線の足である.



ARISTOS

【15.3】

$n \geq 3$ を正の整数とする．

xy 平面上において，原点を中心とし，点 $(1,\ 0)$ を頂点に持つ正 n 角形を P とする．

(1) P の像が P 自身に完全に重なるような 1 次変換の表現行列をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた行列の総和を求めよ．

【解答】

(1) 一般に，1 次変換によって多角形が多角形に移るとき，頂点は頂点に移り，辺は辺に移るので，

$$\text{P の隣り合った 2 頂点は, P の隣り合った 2 頂点に移る} \qquad \cdots\cdots(3.0)$$

$\dfrac{2\pi}{n} = \omega$ と置き，P の頂点 $(1,\ 0)$ が $(\cos k\omega,\ \sin k\omega)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ に移るとすると，

$(1,\ 0)$ の隣りの頂点 $(\cos\omega,\ \sin\omega)$ は，

$$\begin{cases} (\cos(k+1)\omega,\ \sin(k+1)\omega) & \cdots\cdots(3.1) \\ (\cos(k-1)\omega,\ \sin(k-1)\omega) & \cdots\cdots(3.2) \end{cases}$$

の何れかに移ることになる．以降，変換の表現行列を $\mathbf{M}$ と表す．

• (3.1) の場合;

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ 0 & \sin\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\omega & \cos(k+1)\omega \\ \sin k\omega & \sin(k+1)\omega \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M} = \frac{1}{\sin\omega}\begin{pmatrix} \cos k\omega\sin\omega & -\cos k\omega\cos\omega + \cos(k+1)\omega \\ \sin k\omega\sin\omega & -\sin k\omega\cos\omega + \sin(k+1)\omega \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos k\omega & -\sin k\omega \\ \sin k\omega & \cos k\omega \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

• (3.2) の場合;

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ 0 & \sin\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\omega & \cos(k-1)\omega \\ \sin k\omega & \sin(k-1)\omega \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M} = \frac{1}{\sin\omega}\begin{pmatrix} \cos k\omega\sin\omega & -\cos k\omega\cos\omega + \cos(k-1)\omega \\ \sin k\omega\sin\omega & -\sin k\omega\cos\omega + \sin(k-1)\omega \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos k\omega & \sin k\omega \\ \sin k\omega & -\cos k\omega \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.3) は原点を中心とする角 $k\omega$ の回転を表し，(3.4) は直線 $x\sin\dfrac{k\omega}{2} - y\cos\dfrac{k\omega}{2} = 0$ に関する折り返しを表すので，両者は題意成立のための**十分な解**である．即ち，求める行列は次の $2n$ 通り．

$$\begin{pmatrix} \cos k\omega & -\sin k\omega \\ \sin k\omega & \cos k\omega \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \cos k\omega & \sin k\omega \\ \sin k\omega & -\cos k\omega \end{pmatrix} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{n},\ k = 0, 1, \cdots, n-1\right) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

ARISTOS

(2) 求める総和は,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\begin{pmatrix}\cos k\omega & -\sin k\omega\\ \sin k\omega & \cos k\omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos k\omega & \sin k\omega\\ \sin k\omega & -\cos k\omega\end{pmatrix}\right\}=2\times\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos k\omega & 0\\ \sin k\omega & 0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

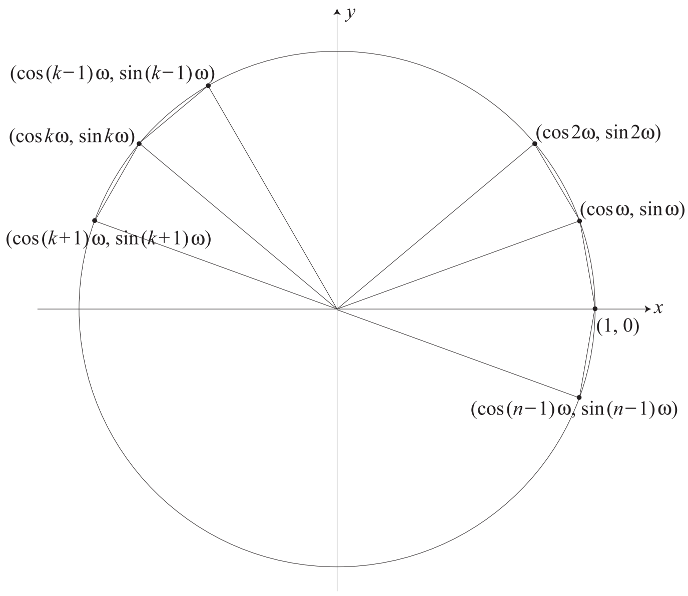
ここで，正 n 角形 P の重心に関して，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos k\omega\\ \sin k\omega\end{pmatrix}=\overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

が成り立つので，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos k\omega & 0\\ \sin k\omega & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

即ち，**零行列**である．



ARISTOS

【15.4】

xy 平面上の 4 点

$$\mathrm{A}(0,\,0),\ \mathrm{B}(1,\,0),\ \mathrm{C}(1,\,1),\ \mathrm{D}(0,\,1)$$

を頂点とする正方形を Q とし，実数 $t \geq 0$ に対して，1 次変換

$$\mathsf{T}_1 : \begin{pmatrix} 1+t & t+t^2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}, \quad \mathsf{T}_2 : \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ t+t^2 & 1+t \end{pmatrix}$$

を考えるとき，Q の T_1 による像，Q の T_2 による像の共通部分の面積の最大値を求めよ.

【解答】

$\det.\mathsf{T}_k = (1+t)^2 \neq 0\ (k=1,2)$ に注意して，B, C, D の T_1，T_2 による像を求めると，

$$\begin{cases} \mathrm{B}_1(1+t,\,0),\ \mathrm{C}_1((1+t)^2,\,1+t),\ \mathrm{D}_1(t+t^2,\,1+t) \\ \mathrm{B}_2(1+t,\,t+t^2),\ \mathrm{C}_2(1+t,\,(1+t)^2),\ \mathrm{D}_2(0,\,1+t) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ここで，B_1 と D_2，C_1 と C_2，D_1 と B_2 はそれぞれ直線 $y=x$ に関して対称であるから，
平行四辺形 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$ と平行四辺形 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$ は直線 $y=x$ に関して対称であるので，
2 個の平行四辺形が共有部分を持つ条件は，D_1 が直線 $y=x$ の上側の領域にあること，
即ち，B_2 が直線 $y=x$ の下側の領域にあることである．即ち，

$$t+t^2 \leq 1+t \ \wedge\ t \geq 0 \iff 0 \leq t \leq 1 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

このとき，四辺形 $\mathrm{AB_2MD_1}$ の面積 S は,

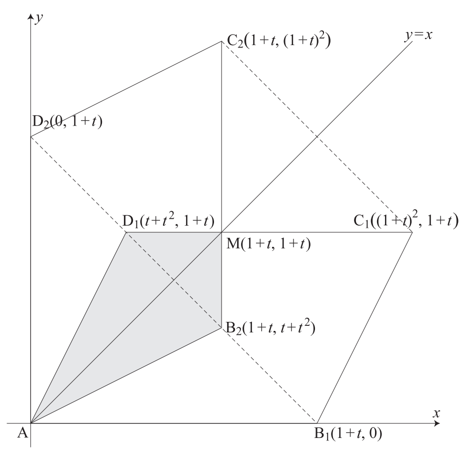
$$S = (1+t)\bigl(1+t-(t+t^2)\bigr) = (1+t)^2(1-t) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) により，

$$\frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t} = 2(1+t)(1-t)-(1+t)^2 = (1+t)(1-3t) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.4) により，S は $0 \leq t \leq 1$ において，$t = \dfrac{1}{3}$ で極大かつ最大.

$$\therefore\ \max.S = \frac{32}{27} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$



ARISTOS

【15.5】

aを正の定数とする．

座標平面上に 3 点 $P_0(1,\,0)$, $P_1(0,\,a)$, $P_2(0,\,0)$が与えられている．

P_2から線分 P_0P_1に垂線を下ろし，その足を P_3とする．

P_3から線分 P_1P_2に垂線を下ろし，その足を P_4とする．

以下同様に，P_nが得られたとき，P_nから線分 $P_{n-2}P_{n-1}$に垂線を下ろし，その足を P_{n+1}とする．

(1) P_6の座標を求めよ．　(2) 点列 $P_0,\,P_1,\,P_2,\,\cdots,\,P_n,\,\cdots$ の極限の点の座標を求めよ．

【解答】

(1) $\angle P_0P_1P_2=\omega$ と置き，

$$\overrightarrow{P_2P_6}=\vec{p},\ \overrightarrow{P_2P_3}=\vec{v_1},\ \overrightarrow{P_3P_4}=\vec{v_2},\ \overrightarrow{P_4P_5}=\vec{v_3},\ \overrightarrow{P_5P_6}=\vec{v_4} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

と表せば,

$$\vec{u}=\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}+\vec{v_4} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

図より,

$$|\vec{v_1}|=\cos\omega,\ |\vec{v_2}|=|\vec{v_1}|\cos\omega,\ |\vec{v_3}|=|\vec{v_2}|\sin\omega,\ |\vec{v_4}|=|\vec{v_3}|\cos\omega,\ \left|\overrightarrow{P_4P_6}\right|=|\vec{v_3}|\sin\omega \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

であるから，P_6の x 座標に関して,

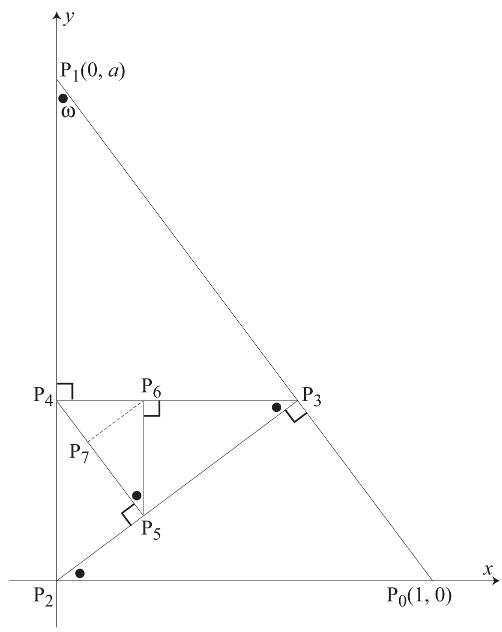
$$\left|\overrightarrow{P_4P_6}\right|=\cos^2\omega\sin^2\omega \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

また，P_3, P_6の y 座標は等しく，$|\vec{v_1}|\sin\omega=\cos\omega\sin\omega$であるから,

$$P_6(\cos^2\omega\sin^2\omega,\,\cos\omega\sin\omega)=\left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2},\,\frac{a}{a^2+1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで,

$$\cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\ \wedge\ \sin\omega=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$



ARISTOS

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_6P_7}}$ は $\overrightarrow{v_1}$ と逆方向であり,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_6P_7}}\right| = |\overrightarrow{v_4}|\sin\omega = |\overrightarrow{v_3}|\sin\omega\cos\omega = |\overrightarrow{v_2}|\sin^2\omega\cos\omega = |\overrightarrow{v_1}|\sin^2\omega\cos^2\omega \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

が成り立つので,

$$\overrightarrow{\mathrm{P_6P_7}} = -\sin^2\omega\cos^2\omega\,\overrightarrow{v_1} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

同様にして,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{P_7P_8}} = -\sin^2\omega\cos^2\omega\,\overrightarrow{v_2} & \cdots\cdots(4.8) \\ \overrightarrow{\mathrm{P_8P_9}} = -\sin^2\omega\cos^2\omega\,\overrightarrow{v_3} & \cdots\cdots(4.9) \\ \overrightarrow{\mathrm{P_9P_{10}}} = -\sin^2\omega\cos^2\omega\,\overrightarrow{v_4} & \cdots\cdots(4.10) \end{cases}$$

即ち,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_6P_{10}}} &= \overrightarrow{\mathrm{P_6P_7}} + \overrightarrow{\mathrm{P_7P_8}} + \overrightarrow{\mathrm{P_8P_9}} + \overrightarrow{\mathrm{P_9P_{10}}} \\ &= -\sin^2\omega\cos^2\omega\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4}\right) = -\sin^2\omega\cos^2\omega \times \overrightarrow{u} \quad \left(\because\ (4.2)\right) \qquad \cdots\cdots(4.11) \end{aligned}$$

(4.1), (4.2), (4.11) により,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_2P_{4n+2}}} &= \overrightarrow{\mathrm{P_2P_6}} + \overrightarrow{\mathrm{P_6P_{10}}} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P_{4n-2}P_{4n+2}}} \\ &= \overrightarrow{u} \times \left(1 + (-\sin^2\omega\cos^2\omega) + \cdots + (-\sin^2\omega\cos^2\omega)^{n-1}\right) \\ &= \overrightarrow{u} \times \frac{1 - (-\sin^2\omega\cos^2\omega)^n}{1 + \sin^2\omega\cos^2\omega} \qquad \cdots\cdots(4.12) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} &0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\omega\cos^2\omega\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(a+1/a)^2}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ &\qquad \iff \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\omega\cos^2\omega\right)^n = 0 \qquad \cdots\cdots(4.13) \end{aligned}$$

(4.12), (4.13) により,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{P_2P_{4n+2}}} &= \overrightarrow{u} \times \frac{1}{1 + \sin^2\omega\cos^2\omega} = \left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2}, \frac{a}{a^2+1}\right) \times \frac{1}{1 + \dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}} \\ &= \left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2}, \frac{a}{a^2+1}\right) \times \frac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2 + a^2} = \left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2 + a^2}, \frac{a(a^2+1)}{(a^2+1)^2 + a^2}\right) \qquad \cdots\cdots(4.14) \end{aligned}$$

即ち, 求める極限の点の座標は (4.14) である.

ARISTOS