【16.1】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2a-1 & a-1\\ 2a+1 & 1\end{pmatrix}$ の表す 1 次変換による不動直線の個数を a の値で分類して調べよ.
また，それぞれの a の値に対応する不動直線の方程式を求めよ.

【解答】

表現行列 $\mathbf{M}$ に対して.

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M}=2a,\quad \det.\mathbf{M}=2a-1-(2a^2-a-1)=-2a^2+3a \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

まず，変換が非正則 $(\det.\mathbf{M}=0)$ となる場合を考える.
● $a=0$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

このとき，不動直線は $y=-x$ の 1 本のみ.
● $a=\dfrac{3}{2}$ の場合;

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & 1/2\\ 4 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

このとき，不動直線は $y=2x$ の 1 本のみ.
以下，正則変換 $(\det.\mathbf{M}\neq 0)$ の場合を議論する.
$\mathbf{M}$ の固有方程式を考えて，

$$\lambda^2-2a\lambda+(-2a^2+3a)=0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) の判別式を D として，

$$\mathrm{D}/4=a^2+2a^2-3a=3a(a-1) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) の符号によって固有ベクトルの個数を分類すると，

$$\begin{cases} a<0 \ \vee \ 1<a & \cdots\cdots \quad 2\text{ 個}\\ a=0 \ \vee \ a=1 & \cdots\cdots \quad 1\text{ 個}\\ \quad 0<a<1 & \cdots\cdots \quad 0\text{ 個}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

● $0<a<1$ の場合; 固有ベクトルは存在せず，**不動直線も存在しない**.
● $a=1$ の場合;
まず，$x=c$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ 3c+t\end{pmatrix} \quad (-\infty<t<\infty) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

即ち，$x=c\ (\forall c)$ はすべて不動直線であり，**不動直線は無数に存在する**.
次に，$y=mx+n$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ mt+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ (m+3)t+n\end{pmatrix} \quad (-\infty<t<\infty) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

より，(1.8) が直線 $y=mx+n$ 上にあるとして，

$$(m+3)t+n=mt+n \iff t=0 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(1.9) は t の任意性に反するので，$y=mx+n$ 型の**不動直線は存在しない**.

● $a<0,\ 1<a<\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$ の場合;
まず，$x=c$ 型の不動直線を調べる．

$$\begin{pmatrix}2a-1 & a-1\\ 2a+1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2a-1)c+(a-1)t\\ (2a+1)c+t\end{pmatrix}\quad(-\infty<t<\infty)\qquad\cdots\cdots(1.10)$$

より，(1.10) の x 座標は c に固定されないので，$x=c$ 型の**不動直線は存在しない**．
次に，$y=mx+n$ 型の不動直線を調べる．

$$\begin{pmatrix}2a-1 & a-1\\ 2a+1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ mt+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2a-1)t+(a-1)mt+(a-1)n\\ (2a+1)t+mt+n\end{pmatrix}\quad(-\infty<t<\infty)\qquad\cdots\cdots(1.11)$$

より，(1.11) が直線 $y=mx+n$ 上にあるとして，

$$\begin{aligned}&(2a+1)t+mt+n=m\big((2a-1)t+(a-1)mt+(a-1)n\big)+n\quad(\forall t)\\ &\iff \big((a-1)m^2+2(a-1)m-(2a+1)\big)t+(a-1)mn=0\quad(\forall t)\\ &\iff (a-1)m^2+2(a-1)m-(2a+1)=0\ \wedge\ mn=0\qquad\cdots\cdots(1.12)\end{aligned}$$

(1.12) において $m=0$ とすると，$a=-\dfrac{1}{2}$ が導かれるので，これを (1.12) に戻して，

$$-\frac{3}{2}m^2-3m=0\iff m=0\ \vee\ m=-2\qquad\cdots\cdots(1.13)$$

即ち，

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2} & \cdots\quad y=n\ (\forall n)\ \vee\ y=-2x\\ a\neq-\dfrac{1}{2} & \cdots\quad y=\dfrac{-(a-1)\pm\sqrt{3a(a-1)}}{a-1}x\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.14)$$

以上より，

$$\begin{cases}a=0 & \cdots\cdots & y=-x & (1\,本)\\ a=\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots & y=2x & (1\,本)\\ a=1 & \cdots\cdots & x=c\ (\forall c) & (無数)\\ a=-\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots & y=c\ (\forall c),\ y=-2x & (無数)\\ a<-\dfrac{1}{2}\vee-\dfrac{1}{2}<a<0\vee1<a<\dfrac{3}{2}\vee\dfrac{3}{2}<a & \cdots\cdots & y=\dfrac{-(a-1)\pm\sqrt{3a(a-1)}}{a-1}x & (2\,本)\\ 0<a<1 & \cdots\cdots & \textbf{存在せず} & (0\,本)\end{cases}$$

【16.2】

平面上の 1 次変換を T とする．原点以外のある点 P が T によって P 自身に移されるとき，原点を通らない直線 $\mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}$ 上のどの点も $\mathfrak{g}$ 上に移されるような直線が存在することを示せ．

【解答】 – 表現行列 –

T の表現行列を

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と表すとき，題意の条件 (原点以外の不動点の存在) は，

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{v} \ \wedge \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0} &\iff \big(\mathbf{M} - \mathbf{E}\big)\mathbf{v} = \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \det.\big(\mathbf{M} - \mathbf{E}\big) = 0 \iff (a-1)(d-1) - bc = 0 \\ &\iff \det.\mathbf{M} - \mathrm{trace}.\mathbf{M} + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots(2.2)\end{aligned}$$

と同値である．ここで，$\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{0} = \overrightarrow{0}$ と表した．

また，題意の不変直線 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} : mx + ny + 1 = 0 \quad \big((m,\ n) \neq (0,\ 0)\big) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と表せば，$\mathfrak{g}$ 上の任意の点 $(x_0,\ y_0)$ の像が $\mathfrak{g}$ 上に存在する条件は，

$$m(ax_0 + by_0) + n(cx_0 + dy_0) + 1 = 0 \iff (ma + nc)x_0 + (mb + nd)y_0 + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

即ち，$\mathfrak{g}$ 上の任意の点 $(x_0,\ y_0)$ が直線

$$(ma + nc)x + (mb + nd)y + 1 = 0 \quad \big((ma + nc,\ mb + nd) \neq (0,\ 0)\big) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

上に存在することと同値である．

題意より，(2.5) は (2.3) の部分集合であり，両者は直線として一致するので，

$$\begin{aligned}&(ma + nc,\ mb + nd) = (m,\ n) \ \wedge \ (m,\ n) \neq (0,\ 0) \\ &\iff \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \det.\begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (a-1)(d-1) - bc = 0 \iff \det.\mathbf{M} - \mathrm{trace}.\mathbf{M} + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots(2.6)\end{aligned}$$

(2.6), (2.2) により，

原点以外の不動点の存在は，原点不通過不変直線の存在と同値である $\qquad \cdots\cdots(2.7)$

即ち，題意は示された．

[Note] (2.2), (2.6) により，$\mathbf{M}$ の固有方程式 · 固有値に関して，

$$\lambda^2 - (\mathrm{trace}.\mathbf{M})\lambda + \det.\mathbf{M} = 0 \iff \lambda^2 - (\det.\mathbf{M} + 1)\lambda + \det.\mathbf{M} = 0 \iff \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = \det.\mathbf{M}$$

即ち，固有値 1 の存在と原点以外の不動点の存在が必要十分な関係になっている．

更に，正則性 : $\det.\mathbf{M} \neq 0$ を追加すれば，(2.7) の**不変直線**を**不動直線**に置き換えてよい．

【別解】 – 線型性 –

Tの不動点をPとする．即ち，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \mathsf{T}(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{p} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

このとき，直線OP上にない点Qに対して，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = m\overrightarrow{\mathrm{OP}} + n\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \iff \mathsf{T}(\overrightarrow{q}) = m\overrightarrow{p} + n\overrightarrow{q} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

を満たす実数 m, n が存在する．$\left(\because\ \overrightarrow{p},\ \overrightarrow{q}\right.$の**一次独立性**$\left.\right)$

(2.2) において，$n = 1$ の場合，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{p}) = \mathsf{T}(\overrightarrow{q}) + t\,\mathsf{T}(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{q} + (m+t)\mathsf{T}(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{q} + s\overrightarrow{p} \quad (s = m+t) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

即ち，Qを通り，$\overrightarrow{p}$を方向ベクトルとする直線を $\mathfrak{g}$ とすれば，題意 (原点不通過不変直線の存在) は成立．

(2.2) において，$n \neq 1$ の場合，

Qを通り，$\overrightarrow{p}$に平行な直線 $\mathfrak{g}'$ 上に点 $\mathrm{R} \neq \mathrm{Q}$ をとれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} \parallel \overrightarrow{p} \iff \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{p}\ \ (t:\text{実数}) \iff \overrightarrow{r} = \overrightarrow{q} + t\overrightarrow{p}\ \ (t:\text{実数}) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

このとき，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{r}) = \mathsf{T}(\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{p}) = n\overrightarrow{q} + (m+t)\overrightarrow{p} \quad \left(\because\ (2.2)\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで，

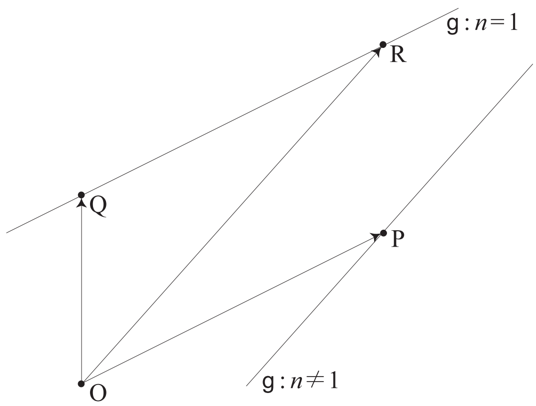
$$m + t = nt \iff t = \frac{m}{n-1} \quad \left(\because\ n \neq 1\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

を満たす実数 t により，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{r}) = n\overrightarrow{q} + nt\overrightarrow{p} = n\left(\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{p}\right) = n\overrightarrow{r} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

即ち，Pを通り，$\overrightarrow{r}$に平行な直線を $\mathfrak{g}$ とすれば題意は成立．即ち，

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{p} + t\,\mathsf{T}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{p} + nt\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} + s\overrightarrow{r} \quad (s = nt) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$



[Note]

不動点 $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ の存在から原点不通過不変直線 $\mathfrak{g}$ の存在を導いたが，逆の命題も成り立つ．即ち，

「不動点 $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ の存在と原点不通過不変直線 $\mathfrak{g}$ の存在は同値である」

この事実は重要であり，入試において頻出なので記憶に価する．

【逆命題の証明】

不変直線 $\mathfrak{g}$ の方向ベクトルを $\vec{v} \neq \vec{0}$ と表せば,

$$\mathsf{T}(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad (\lambda \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) において，$\lambda = 1$ の場合,

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad (\mathrm{P} \neq \mathrm{O}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

として，原点以外の不動点 P が存在する.

(2.8) において，$\lambda \neq 1$ の場合，$\mathfrak{g}$ 上の点 Q に対して,

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

を満たす点 Q′ も $\mathfrak{g}$ 上にあるので，$\left(\because\ \mathfrak{g} : \text{不変直線}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \mu \vec{v} \quad (\mu : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

(2.11) において，$\mu = 0$ の場合，不動点 $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ が存在する.

(2.11) において，$\mu \neq 0$ の場合，即ち,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \mu \vec{v} \quad (\mu \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

このとき，$\mathfrak{g}$ 上の点 $\mathrm{R} \neq \mathrm{Q}$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \tau \vec{v} \quad (\tau \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

と表せるので，$\left(\because\ \mathfrak{g} : \text{不変直線}\right)$

(2.10), (2.12), (2.13) により,

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OR}}) = \mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) + \tau \mathsf{T}(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \mu \vec{v} + \tau\lambda \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (\mu + \tau\lambda)\vec{v} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

(2.14) において,

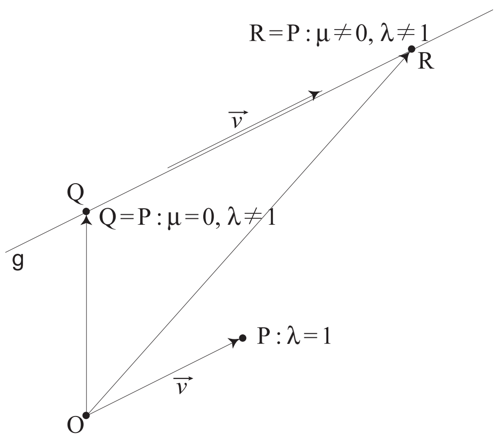
$$\mu + \tau\lambda = \tau \iff \tau = \frac{\mu}{1-\lambda} \quad \left(\because\ \lambda \neq 1,\ \mu \neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

なる $\tau \neq 0$ を選べば，(2.14), (2.15) により,

$$\mathsf{T}(\overrightarrow{\mathrm{OR}}) = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (\mu + \tau\lambda)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \tau \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad (\tau \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

即ち，不動点 $\mathrm{P} = \mathrm{R}$ が存在する.

以上により，不変直線 $\mathfrak{g}$ の存在から不動点 P の存在が導けた.



【16.3】

曲線

$$\left(10+3\sqrt{3}\right)x^2+6xy+\left(10-3\sqrt{3}\right)y^2=16 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

は楕円を表すことを示せ．また，その焦点の座標を求めよ．

【解答】

(3.1) の表現行列は，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}10+3\sqrt{3} & 3\\ 3 & 10-3\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

このとき，trace.$\mathbf{M}=20$，det.$\mathbf{M}=64$ であるから，$\mathbf{M}$ の固有方程式と固有値は，

$$\lambda^2-20\lambda+64=0 \iff \lambda_1=16,\ \lambda_2=4 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルは，

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 2-\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}-2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) により，正規直交行列 $\mathbf{P}$ を

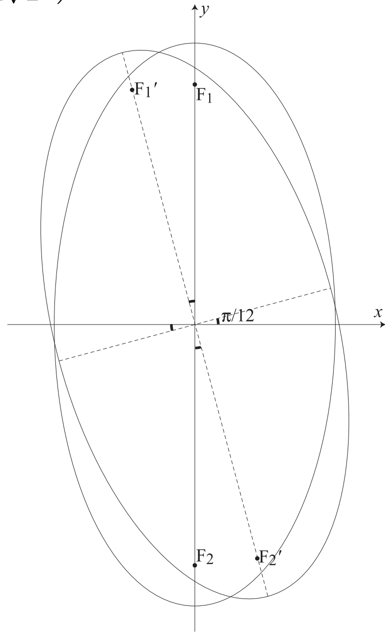
$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}\begin{pmatrix}1 & -2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

と定めれば，${}^t\mathbf{X}=(x\ \ y)$ を用いて，

$$\begin{aligned}&\left(10+3\sqrt{3}\right)x^2+6xy+\left(10-3\sqrt{3}\right)y^2=16\\ &\qquad\iff {}^t\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}=16 \iff {}^t\mathbf{X}'\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}'=16 \ \wedge\ \mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X}'\\ &\qquad\qquad\iff (x'\ \ y')\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=16 \iff (x')^2+\frac{(y')^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots(3.6)\end{aligned}$$

(3.6) の焦点 $\left(0,\ \pm\sqrt{3}\right)$ より，(3.1) の焦点の座標は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}\begin{pmatrix}1 & -2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}\begin{pmatrix}-2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}\\ &\qquad\iff \left(\pm\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \pm\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \quad (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(3.7)\end{aligned}$$



【16.4】

媒介変数 t によって表示される曲線

$$\mathfrak{C}: x = 2t + t^2,\ y = t + 2t^2 \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

が放物線であることを示し，その頂点の座標，焦点の座標，準線の方程式を求めよ．

【解答】

(4.1) から t を消去する．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(4.2) により，

$$\frac{-x+2y}{3} = t^2 = \left(\frac{2x-y}{3}\right)^2 \iff 4x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 6y = 0 \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) により，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

を用いて，

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 6y = 0 \iff {}^t\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X} + {}^t\mathbf{N}\mathbf{X} = 0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

更に，trace.$\mathbf{M} = 5$, det.$\mathbf{M} = 0$ より，$\mathbf{M}$ の固有値は，

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \iff \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルは，

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

このとき，$\mathbf{M}$ を標準化する回転行列 $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

と定め，$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ によって (4.1) を書き換えると，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 6y = 0 &\iff {}^t\mathbf{X}'\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}' + {}^t\mathbf{N}\mathbf{P}\mathbf{X}' = 0 \\ &\iff (x'\ y')\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (3\ \ -6)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff y' = \frac{5\sqrt{5}}{9}(x')^2 + \frac{4}{3}x' \qquad \cdots\cdots(4.9) \end{aligned}$$

(4.9) を同値変形して，

$$\left(x' + \frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2 = 4 \times \frac{9}{20\sqrt{5}}\left(y' + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.10) の頂点の座標，焦点の座標，準線の方程式は，

$$\left(-\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{4}{5\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{7}{20\sqrt{5}}\right), \quad y' = -\frac{5}{4\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(4.11) を $\mathbf{P}$ で回転して，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{-2}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\dfrac{2}{25}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots\cdots(4.12) \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{-1}{20\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} & \cdots\cdots(4.13) \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{-5}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+2 \end{pmatrix} \ (\forall t) & \cdots\cdots(4.14) \end{cases}$$

(4.12), (4.13), (4.14) により，

$$\left(-\frac{16}{25}, -\frac{2}{25}\right), \quad \left(-\frac{11}{20}, \frac{1}{10}\right), \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

以上より，$\mathfrak{C}$ は (4.3) で定義される**放物線**であり，
その頂点の座標，焦点の座標，準線の方程式は (4.15) で与えられる．