

【2.1】

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して, xy 平面上の点 A, B を次のように定める.

$$A\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}, -2\right), \quad B\left(\frac{2t}{3}, -2t\right)$$

実数 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき, 線分 AB の通過し得る領域を図示せよ.
また, その領域の面積を求めよ.

【2.2】

曲線 $\mathcal{C}: y = x^4 - 2x^2 + a$ が異なる 2 点で x 軸に接している.

(1) a の値を求めよ.

(2) \mathcal{C} と直線 $\mathcal{L}: y = b$ ($0 < b < a$) とで囲まれる 3 つの領域について,

\mathcal{L} の上側にある領域の面積が \mathcal{L} の下側にある 2 つの領域の面積の和に等しいとき, b の値を求めよ.

【2.3】

関数 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$u_1(x) = x^3 - 3x, \quad u_{n+1}(x) = \{u_n(x)\}^3 - 3u_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義するとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 a に対して, $u_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ.
- (2) 実数 a に対して, $u_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ.
- (3) $n (\geq 3)$ を整数とすると, $u_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ.

【2.4】

定数 $a (> 0)$ に対して, x の 3 次方程式

$$2x^3 + 3(a-1)x^2 - 6ax = k \quad (a > 0)$$

が実数解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 \leq x_2 \leq x_3$) を持つものとする.

実数 k が変化するとき,

$$|x_1| + |x_2| + |x_3|$$

の最大値が 3 となるような a の値を求めよ.