【4.1】

数列 $\{a_n\}$ を次式によって定義する．

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

すべての正整数 n に対して，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

【4.2】

正整数 n に対して，$\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ という形の無理数を考える．
これらの無理数は何れもそれぞれ適当な正整数 m によって，$\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ の形に表されることを示せ．

【4.3】

O を中心とする円周上に異なる 3 点 A_0, B_0, C_0 が右回りに配置されている．
整数 $n \geq 0$ に対して，点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$, $\{\mathrm{C}_n\}$ を次の規則によって定義する．

- A_{n+1} は弧 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を 2 等分する点である．ただし，弧 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ は C_n を含まない
- B_{n+1} は弧 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ を 2 等分する点である．ただし，弧 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は A_n を含まない
- C_{n+1} は弧 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$ を 2 等分する点である．ただし，弧 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$ は B_n を含まない

$\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n = a_n$ とするとき，次の問いに答えよ．
(1) すべての整数 $n \geq 0$ に対して，

$$4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であることを示せ．
(2) a_{3n} を a_0 を用いて表せ．

【4.4】

与えられた正整数 k に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する．ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す.

(1) $k = 8$, $k = 9$ に対して，一般項 a_n を求めよ.

(2) すべての正整数 n に対して，

$$a_n \leq \frac{k-1}{2} \ \wedge \ a_n \leq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) ある番号 n に対して，$a_n = a_{n+1}$ が成り立つとき，
n 以上のすべての整数 m に対して，$a_n = a_m$ であることを示し，その a_n を求めよ.