【5.1】

正整数 n に対して，数列 $\{u_n\}$ を次のように定義する．

$$u_1 = 2,\ \ u_2 = a^2 + 2, \quad u_{n+2} = a u_n - u_{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，$\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないための整数 a に関する必要十分条件を求めよ．

ARISTOS

【5.2】

正整数 n に対して，$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする．

(1) m を正整数とするとき，$a_n = m$ となる正整数 n の個数を m の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2006} a_k$ を求めよ．

ARISTOS

【5.3】

正整数 n に対して，連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leq n \\ -x+y-z \leq n \\ x-y-z \leq n \\ -x-y+z \leq n \end{cases}$$

を満たす xyz 空間内の格子点の個数を $u(n)$ で表すとき，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u(n)}{n^3}$$

の値を求めよ．

ARISTOS

【5.4】

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ に対して,

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

によって数列 $\{s_n\}$ を定義する.

(1) $s_{n+2},\ s_{n+1},\ s_n$ の関係式を求めよ. ただし, $n=1, 2, 3, \cdots$ とする.

(2) $\left[\alpha^{2003}\right]$ の一位の数字を求めよ. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

ARISTOS

【5.4】

漸化式

$$a_{=}4, \quad a_{n+1}=a_n{}^2+4a_n+3 \ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

で定まる整数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) $a_n-4\equiv 0 \pmod 7$ を示せ.

(2) $a_n{}^2+a_n+1\equiv 0 \pmod 7$ を示せ.

(3) $a_n{}^{3p}$ を 7^n で割った余りを求めよ. ただし, p は正整数とする.

ARISTOS