【6.1】

数列 $\{a_n\}$ が次の関係式で定義されている．

$$6\sum_{k=1}^{n} k a_k = (4n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，一般項 a_n を求めよ．

【6.2】

nを正の整数とする．

n個の球とn個の箱があり，球にも箱にも $1, 2, 3, \cdots, n$の通し番号が付けてある．

n個の球を 1 個ずつ箱に入れるとき，箱の番号と球の番号が一致しない入れ方の総数を a_nで表す．

例えば，$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2, \cdots$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_{n+2},\ a_{n+1},\ a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$の満たす関係式を求めよ．

(2) $\dfrac{a_n}{n!} = p_n \wedge p_{n+1} - p_n = q_n$ と置いて，一般項 q_n を求めよ．また，一般項 a_n を求めよ．

【6.3】

Pascal 三角形の第 n 行の部分和

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k}, \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k+1}, \quad R_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k+2}$$

として数列 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ を定義する．ただし，$k > n$ のとき，${}_n\mathrm{C}_k = 0$ とする．

(1) P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1} のそれぞれを P_n, Q_n, R_n の式で表せ.

(2) 一般項 P_n, Q_n, R_n のそれぞれを n の式で表せ.

$$\begin{array}{c}
{}_0\mathrm{C}_0 \\
{}_1\mathrm{C}_0 \quad {}_1\mathrm{C}_1 \\
{}_2\mathrm{C}_0 \quad {}_2\mathrm{C}_1 \quad {}_2\mathrm{C}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}_n\mathrm{C}_0 \quad \cdots \quad {}_n\mathrm{C}_r \quad {}_n\mathrm{C}_{r+1} \quad \cdots \quad {}_n\mathrm{C}_n \\
{}_{n+1}\mathrm{C}_0 \quad \cdots\cdots \quad {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} \quad \cdots\cdots \quad {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}
\end{array}$$

【6.4】

n 個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が条件

$$a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k > 0 \quad (1 \leq k \leq n-2)$$

を満たしている．また，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の最小値を m とする．
このとき，$a_j = m$ となる番号 $j\ (1 \leq j \leq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ．