【7.1】

正整数 N に対して，$x+y+z=N$ を満たす非負整数解 (x, y, z) を考える．

(1) 非負整数解 (x, y, z) の個数を求めよ．

(2) N を 2 以上の偶数とする．

x, y, z のすべてが偶数となる解の個数を求めよ．また，x, y, z の中に奇数が含まれる解の個数を求めよ．

(3) N を 3 以上の奇数とする．

x, y, z のすべてが奇数となる解の個数を求めよ．また，x, y, z の中に偶数が含まれる解の個数を求めよ．

(4) M を正整数として，$N=M^2$ とするとき，x が平方数となる解の個数を求めよ．

【7.2】

白球 n 個，赤球 n 個の $2n$ 個の球を 1 個ずつ箱に入れていくとき，箱の中の状態が常に

$$(\textbf{白球の個数}) \geqq (\textbf{赤球の個数})$$

となるような入れ方の総数を c_n で表す．ここで，同じ色の球は区別しないものとする．

(1) $c_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) c_n が次の漸化式を満たすことを式の持つ幾何学的な意味を利用して説明せよ．

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

【7.3】

$n \geq 3$ として，整数 n, k は $1 \leq k \leq n$ を満たすものとする．

1, 2, $\cdots$, n の番号の付いた n 個の球を区別のつかない k 個の箱に入れる入れ方の総数を ${}_n\mathrm{S}_k$ で表す．

ただし，いずれの箱も球の入っていない状態は起こらないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $2 \leq k \leq n$ とするとき，${}_{n+1}\mathrm{S}_k$ を ${}_n\mathrm{S}_{k-1}$，${}_n\mathrm{S}_k$ を用いて表せ．

(2) ${}_n\mathrm{S}_{n-1}$，${}_n\mathrm{S}_{n-2}$ をそれぞれ求めよ．

(3) ${}_n\mathrm{S}_3$，${}_n\mathrm{S}_4$ をそれぞれ求めよ．

【7.4】

nを正の整数とする．

n 個の球を 3 個の箱に分けて入れる問題を考える．ただし，空箱があってもよいものとする．

以下に述べる 4 通りの場合について，それぞれ異なる入れ方の総数を求めよ．

(1) 1 から n まで番号の付いた n 個の球を A, B, C と区別された 3 個の箱に入れる方法は何通りか.

(2) 互いに区別のつかない n 個の球を A, B, C と区別された 3 個の箱に入れる方法は何通りか.

(3) 1 から n まで番号の付いた n 個の球を区別のつかない 3 個の箱に入れる方法は何通りか.

(4) $n = 6m$ (m : 正整数) とする．

n 個の互いに区別のつかない球を区別のつかない 3 個の箱に入れる方法は何通りか.