【10.1】

1 個のサイコロを続けて投げて，$\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定義する．
出た目の順に c_1, c_2, $\cdots$ とするとき，$1 \leq k \leq n-1$ を満たす整数 k に対して，$c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$.
それ以外の場合は，$a_n = 0$ とする．ただし，$a_1 = c_1$ とする．

(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty} E(n)$ の値を求めよ．

(2) a_1, a_2, $\cdots$, a_n の内，2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty} N(n)$ の値を求めよ．

【10.2】

nを正の整数とする．A, B の 2 人が次のルールでゲームを行う．
Aは 0, 1, 2, $\cdots$, n と書かれた $n+1$ 枚のカードを持っており，Bは 1, 2, $\cdots$, n と書かれた n枚のカードを持っている．最初に，B が A のカードから 1 枚を取り，番号が一致するカードがあれば，その 2 枚のカードをその場に捨てる．番号が一致しないカードは，そのまま持ち続ける．次に，B にカードがあれば，A が B のカードから 1 枚を取り同様の操作をする．こうして先にカードの無くなった方を勝ちとする．A が勝つ確率を p_n，B が勝つ確率を q_n とする．ただし，相手のカードを取るとき，どのカードも等しい確率で取るものとする．

(1) p_1, p_2, q_1, q_2 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $(n+2)p_n - n\,p_{n-2} = 1$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) p_n, q_n をそれぞれ求めよ．

【10.3】

サイコロが 1 の目を上面にして置いてある．向かい合った 1 組の面の中心を通る直線の周りに 90° 回転する操作を繰り返すことにより，サイコロの置き方を変えていく．ただし，各回ごとに回転軸および回転する向きの選び方は，それぞれ同様に確からしいとする．第 n 回目の操作の後に 1 の目が上面にある確率を p_n，側面の何れかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする．

(1) $p_1,\ q_1,\ r_1$ をそれぞれ求めよ．

(2) $p_{n+1},\ q_{n+1},\ r_{n+1}$ のそれぞれを $p_n,\ q_n,\ r_n$ の式で表せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} p_n,\ \lim_{n\to\infty} q_n,\ \lim_{n\to\infty} r_n$ をそれぞれ求めよ．

【10.4】

3 個の赤球と n 個の白球を環状に並べるものとする.
このとき, 白球が連続して $k+1$ 個以上並ばない確率を求めよ. ただし, $\dfrac{n}{3} \leq k < \dfrac{n}{2}$ とする.