【11.1】

三角形 ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき,

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{0}\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)$$

が成り立っている．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ.
また，$\cos\angle A$, $\cos\angle B$, $\cos\angle C$ をそれぞれ α, β, γ の式で表せ.

【11.2】

点 O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円と，この円に内接する鋭角三角形 ABC を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

によって 2 点 H, K を定めるとき，以下の各問いに答えよ．

(1) H は三角形 ABC の垂心であることを示せ．

(2) BC の中点を $\mathrm{M_1}$，CA の中点を $\mathrm{M_2}$，AB の中点を $\mathrm{M_3}$ とする．

更に，AH の中点を $\mathrm{N_1}$，BH の中点を $\mathrm{N_2}$，CH の中点を $\mathrm{N_3}$ とする．

このとき，6 点 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$, $\mathrm{N_1}$, $\mathrm{N_2}$, $\mathrm{N_3}$ は K を中心とする同一円周上にあることを示せ．

(3) AH と BC の交点を $\mathrm{L_1}$，BH と CA の交点を $\mathrm{L_2}$，CH と AB の交点を $\mathrm{L_3}$ とする．

このとき，3 点 $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{L_2}$, $\mathrm{L_3}$ は (2) の円周上にあることを示せ．

【11.3】

座標平面上にベクトル

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_4}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

が与えられているとき，以下の各領域を図示せよ．

(1) 実数 t_1, t_2 に対して，

$$\begin{cases} \overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2} \\ \dfrac{1}{2}\leq t_1+t_2\leq 1, \quad t_k\geq 0\ \ (k=1,2) \end{cases}$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域．

(2) 実数 t_1, t_2, t_3 に対して，

$$\begin{cases} \overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}-t_3\overrightarrow{v_3} \\ t_1+t_2+t_3=1, \quad t_k\geq 0\ \ (k=1,2,3) \end{cases}$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域．

(3) 実数 t_1, t_2, t_3, t_4 に対して，

$$\begin{cases} \overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}+t_3\overrightarrow{v_3}+t_4\overrightarrow{v_4} \\ 1\leq t_1+t_2+t_3+t_4\leq 2, \quad t_k\geq 0\ \ (k=1,2,3,4) \end{cases}$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域．

【11.4】

平面上に三角形 ABC と点 P があり，

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0} & \cdots\cdots(4.1) \\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=1 & \cdots\cdots(4.2) \end{cases}$$

が成り立っているとき，次の各問いに答えよ．

(1) P は三角形 ABC の周または内部にあることを示せ．

(2) 三角形 ABC が 1 辺の長さ $l\,(>0)$ の正三角形のとき，その内心を I として，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$ を α, β, γ, l で表せ．

(3) (2) において，P が I を中心とする正三角形 ABC の内接円上にあるための必要十分条件は，

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であることを示せ．