【12.1】

座標空間内に 3 点 P, Q, R があって毎秒 1 の速さで，P は点 (0, 0, 0) を出発して x 軸上を正方向へ，Q は点 (2, 0, 0) を出発して y 軸と平行に正方向へ，R は点 (2, 2, 0) を出発して z 軸と平行に正方向へ進むとき，三角形 PQR の面積が最小となるのは何秒後か.

【12.2】

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある．点 G は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

を満たし，3 点 P, Q, R はそれぞれ OA, OB, OC 上にある．

(1) $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$ を満たす実数 p, q, r に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とするとき，G が三角形 PQR 上にあるならば,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 4$$

が成り立つことを示せ.

(2) R から三角形 OAB に下ろした垂線の足を H とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{r}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

であることを示せ.

(3) G が常に三角形 PQR 上にあるように P, Q, R を変化させるとき，
三角錐 OPQR の体積の最小値を求めよ.

【12.3】

座標空間内の 6 個の平面

$$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$$

で囲まれた立方体を $\mathfrak{C}$ とする．また，

$$\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\quad \left(a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \left|\overrightarrow{d}\right|=1\right)$$

とする．

$\mathfrak{H}$ を原点 O を通り，$\overrightarrow{d}$ に垂直な平面とするとき，$\overrightarrow{d}$ を進行方向に持つ光線によって平面 $\mathfrak{H}$ に生じる $\mathfrak{C}$ の影の面積は $a_1+a_2+a_3$ であることを示せ．ここで，$\mathfrak{C}$ の影とは，$\mathfrak{C}$ 内の点から平面 $\mathfrak{H}$ に引いた垂線の足全体のなす図形である．

【12.4】

3 組の対辺が垂直である四面体の各辺の中点は，四面体の重心を中心とする同一球面上にあることを示せ.