

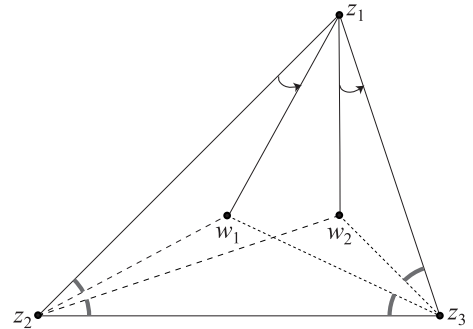
【14.1.a】

3次方程式 $f(x) = 0$ の3解を z_1, z_2, z_3 , 2次方程式 $f'(x) = 0$ の2解を w_1, w_2 で表す.

また, 複素平面上において3点 z_1, z_2, z_3 は三角形を構成するものとする.

2点 w_1, w_2 が三角形 $z_1z_2z_3$ の内部にあることを既知として, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\angle w_1z_1z_2 = \angle w_2z_1z_3, \quad \angle w_1z_2z_1 = \angle w_2z_2z_3, \quad \angle w_1z_3z_2 = \angle w_2z_3z_1$$



【14.1.b】

四辺形 ABCD に対して, 不等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

が成り立つことを示せ. また, 等号の成立条件を調べよ.

【14.2】

(1) 複素平面上の直線

$$\mathcal{L}: \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \beta \quad (\beta: \text{実数})$$

に関して対称な2点 w, w' に対して,

$$w' = \gamma\bar{w} + \delta \quad (\gamma, \delta: \text{複素数})$$

を満たす γ, δ を α, β の式で表せ.

(2) 2点 $A(1), B(\sqrt{3}i)$ を通る直線を \mathcal{L} とする.

点 $P(w)$ と直線 \mathcal{L} に関して対称な点 $Q(w')$ に対して,

$$w' = \gamma\bar{w} + \delta \quad (\gamma, \delta: \text{複素数})$$

を満たす複素数 γ, δ を求めよ.

【14.3】

複素平面上の変換 $T : w = \frac{1}{z}$ に関して、次の各問いに答えよ.

- (1) T によって単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点はその点自身に移ることを示せ.
- (2) T によって原点を通る任意の直線はその直線自身に移ることを示せ.
- (3) T によって原点を通らない任意の円は、原点を通らないある円に移ることを示せ.
- (4) T によって単位円 $|z| = 1$ と直交する原点を通らない任意の円は、その円自身に移ることを示せ.
ただし、2円が直交するとは、2円の交点においてそれぞれの円の接線が直交することである.