【15.1】

平面上の原点 O と点 A$(4,\ 0)$ を通る円 $\mathfrak{C}$ が円 $x^2+y^2=4$ と異なる 2 点 P, Q において交わっている. $\mathfrak{C}$ を変化させるとき, 線分 PQ の中点 R の描く軌跡を求めよ.

【15.2】

$k > 0$ とする.

xy 平面上の 2 曲線

$$y = k(x - x^3), \quad x = k(y - y^3)$$

が第 1 象限に $x \neq y$ なる交点 (x, y) を持つような k の値の範囲を求めよ.

【15.3】

原点 O を中心とする半径 $a>0$ の円に対して，円の外部の点 Q_1 から 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ A_1, B_1 とする．更に，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ 上の点で円の外部にある点 Q_2 をとる．点 Q_2 からこの円に引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ A_2, B_2 とするとき，直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ は点 Q_1 を通ることを示せ．次に，2 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ の交点を $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ とするとき，2 点 Q_1, Q_2 を通る直線は方程式 $x_0x+y_0y=a^2$ で与えられることを示せ．

【15.4】

$a > 0$ とする．

直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ -\dfrac{1}{4a}\right)$ から放物線 $y = ax^2$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}(q,\ aq^2)$, $\mathrm{R}(r,\ ar^2)$ とする．また，Q, R における 2 本の法線の交点を S とする．P が直線上を移動するとき，S の軌跡の方程式を求めよ．更に，S の描く軌跡を $\mathfrak{C}$ として，S における $\mathfrak{C}$ の接線と x 軸との交点を T とする．$p > 0$ のとき，2 点 P, T の距離を最小にする P の座標を求めよ．