【20.1】

xy 平面上の 2 点 P, Q に対して,

P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す.

(1) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ に対して, $d(\mathrm{O},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ.

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ と点 $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ に対して, $d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ.

(3) 実数 $a \geq 0$ に対して, 点 $\mathrm{Q}(a,\ a^2+1)$ を考えるとき, 次の条件

「原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に対して, $d(\mathrm{O},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ となる $a \geq 0$ が存在する」

を満足する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ.

【20.2】

$a \geq 0$ とするとき，不等式

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-y}{x+y} \leq \frac{1}{2}$$

を満たすすべての $x>0,\ y>0$ に対して，

$$x^3 - 3a^2xy^2 + 2y^3 \geq 0$$

が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

【20.3】

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり，円の内部または周上に 2 点 Q, R を三角形 PQR が 1 辺の長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形となるようにとるとき，$\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2$ の最大値および最小値を求めよ．

【20.4】

nを正の整数，aを実数とする．
すべての整数mに対して，

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0$$

が成り立つようなaの値の範囲をnを用いて表せ．