【22.1】

次の命題 $\mathrm{P}(n)$ を n に関する帰納法で証明せよ.

$\mathrm{P}(n)$: x の n 次式 $f(x)$ に対して,

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n)$$

がすべて整数のとき, 任意の整数 m に対して $f(m)$ は整数である.

【22.2】

整数 $k \geq 2$ に対して，

$$f_k(x) = x^k - kx + k - 1$$

と定める．このとき，次の (1) および (2) を示せ．

(1) n 次の整式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ を用いて，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である．

(2) n 次の整式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ を用いて，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x) \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k = 0$$

の形に表されることが必要十分である．

【22.3】

$f_n(z) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義し，$x = z + \dfrac{1}{z}$ と置く.

(1) $f_n(z)$ は x の整数係数の n 次式であることを示せ.

以下，$f_n(z)$ の x^{n-k} の係数を $a_n(k)$ で表す．即ち，$f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n(k)x^{n-k}$ である.

(2) すべての偶数 n に対して，$a_n(n)$ を求めよ.

(3) すべての正整数 n および $0 < k \leq n$ なるすべての奇数 k に対して，$a_n(k) = 0$ を示せ.

【22.4】

$f(x)$ を $n \geq 1$ 次以下の整式とする.
異なる $n+1$ 個以上の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n+1},\ \cdots$ に対して,

$$f(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n+1, \cdots)$$

が成り立つとき，すべての実数 x について恒等的に

$$f(x) = 0 \quad (\forall x)$$

であることを示せ.