【24.1】

a を正の整数とする.

$2x-3y$ が 11 で割り切れるような整数 x, y の組 (x, y) の集合を Z,

$5x+ay$ が 11 で割り切れるような整数 x, y の組 (x, y) の集合を W

とおくとき, $Z=W$ となるような最小正整数 a の値を求めよ.

【24.2】

(1) 恒等式

$$\left(u^2-Nv^2\right)\left(x^2-Ny^2\right)=(ux+Nvy)^2-N(vx+uy)^2$$

を利用して，方程式

$$x^2-3y^2=1$$

の正整数解

$$(x_n,\ y_n)\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

を無限に生成する数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の満たす連立漸化式を求めよ.

(2) 連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-a_n+2b_n \end{cases}$$

に対して，初期条件

$${a_1}^2-3{b_1}^2=1\quad (a_1,\ b_1:\text{正整数})$$

を満たす正整数 a_1, b_1 を与えるとき，すべての番号 n に対して，

$${a_n}^2-3{b_n}^2=1\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が単調減少な正整数列であることを示し，

$$a_m=2\ \wedge\ b_m=1$$

を満たす番号 m が存在することを示せ.

(4) 以上の議論を踏まえ，方程式 $x^2-3y^2=1$ の一般解 $(x_n,\ y_n)$ を n の式で表せ.

【24.3】

整数 n と素数 p に対して，x の 3 次方程式

$$x^3 + nx^2 - (5-n)x + p = 0$$

が整数解を持つとき，この方程式の解をすべて求めよ．

【24.4】

n, a, b, c, d はすべて 0 以上の整数であり,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6 \\ a+b+c+d \leq n \\ a \geq b \geq c \geq d \geq 0 \end{cases}$$

を満たすものとする.

このような整数の組 $(n,\ a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ.