【25.1】

(1) $110101_{(2)} \times 1011_{(2)}$ の結果を 8 進表記して答えよ.

(2) 正整数 x が 2 進表記されているとき，それを右から 3 桁ずつ区切り，10 進表記で各区切りの表す数 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ を考える．これらの和 $y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ が 7 で割り切れるとき，x は 7 で割り切れることを示せ.

ARISTOS

【25.2】

$\alpha_1,\ \alpha_2$ は正の無理数で

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1$$

を満たすものとする.

(1) 任意の正整数 n に対して,

$$\left[\frac{n}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{n}{\alpha_2}\right]=n-1$$

が成り立つことを示せ.

(2) 2 つの系列の整数

$$\begin{cases} [\alpha_1],\ [2\alpha_1],\ [3\alpha_1],\ \cdots \\ [\alpha_2],\ [2\alpha_2],\ [3\alpha_2],\ \cdots \end{cases}$$

には, すべての正整数が漏れなく, 重複なく現れることを示せ.

ARISTOS

【25.3】

正整数 n の関数 $a(n)$, $b(n)$ を次のように定義する．

$$a(n) = (n \text{ を } 7 \text{ で割った余り}), \quad b(n) = 2a\left(\sum_{k=1}^{7} k^n\right)$$

(1) すべての正整数 n に対して，$a(n^7) = a(n)$ であることを示せ．

(2) 正整数 n を任意に 1 つ決めて $b(n)$ の値を計算せよ．この $b(n)$ の値を設問 (2) における得点とする．

ARISTOS

【25.4】

複素数 z に対して，集合 A, B, C, D, S を次のように定義する．ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す．

$$\mathrm{A}=\left\{z\ \middle|\ \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{B}=\left\{z\ \middle|\ \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{3}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{C}=\left\{z\ \middle|\ \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}\mathbf{i}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{D}=\left\{z\ \middle|\ \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{3}\mathbf{i}}:\text{整数}\right\},$$

$$\mathrm{S}=(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})$$

集合 S から 17 個の複素数を任意に選び，その集合を T とする．

このとき，T の中の 2 数で，その平均値が S の要素になっているものが必ず存在することを示せ．

ARISTOS