【S.5.1】

定数 a, r が次の関係を満たすとする.

$$a \geq \frac{1}{2}, \quad 0 < r < \frac{\sqrt{4a-1}}{2}$$

このとき, 円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ の接線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる領域の面積の最小値を a, r の式で表せ.

【S.5.2】

互いに異なる $n \geq 3$ 個の 1 より大なる実数の集合 $\mathbf{M} = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ が次の性質を持つ.

$$\mathbf{M}\ \text{の異なる要素}\ a_j,\ a_k\ \text{に対して,}\quad \frac{a_j}{a_k},\ \frac{a_k}{a_j}\ \text{の一方が必ず}\ \mathbf{M}\ \text{に属する}$$

このとき, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は, その順序を適当に入れ替えることにより等比数列になることを示せ.

【S.5.3】

箱の中に青，赤，黄のカードがそれぞれ 3 枚，2 枚，1 枚合計 6 枚入っている．1 回の試行において，箱の中からカードを 1 枚取り出し，取り出したカードと同色のカードを 1 枚加えて再び箱の中に戻す．従って，n回の試行を完了したときには $n+6$ 枚のカードが箱の中にあることになる．n回目の試行が完了したとき，箱の中にある青のカードの枚数の期待値 E_n を求めよ．

【S.5.4】

三角形 ABC の垂心を H として，$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{c}$ と略記する．
このとき，次の (4.1), (4.2), (4.3) に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{\mathrm{HO_1}} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} & \cdots\cdots(4.1) \\ 2\overrightarrow{\mathrm{HO_2}} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} & \cdots\cdots(4.2) \\ 2\overrightarrow{\mathrm{HO_3}} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} & \cdots\cdots(4.3) \end{cases}$$

(1) (4.1), (4.2), (4.3) が成り立つとき，H が三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ の外心であることを示せ．
(2) (4.1), (4.2), (4.3) で定まる $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$ は，それぞれ三角形 HBC, HCA, HAB の外心であることを示せ．