【W.3.1】

xy 平面上の領域 $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D}:\begin{cases}\left(x-\dfrac{r}{2}\right)^2+y^2\geq\dfrac{r^2}{4}\\(x-r)^2+y^2\leq r^2\\y\geq 0\ \wedge\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)\end{cases}\qquad(r>0)$$

によって定義し，この平面上の反転

$$\mathsf{T}:x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2}\ \wedge\ y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2}\quad(r>0)$$

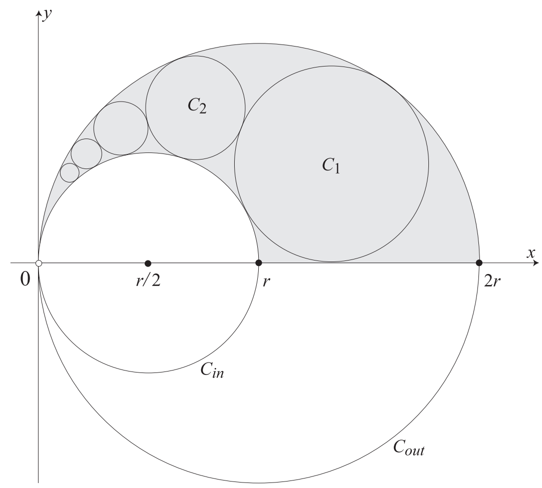
について考える．

(1) 領域 $\mathfrak{D}$ の反転 T による像の領域を図示せよ．

(2) 2 個の円

$$\mathfrak{C}_{in}:\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\frac{r^2}{4},\quad \mathfrak{C}_{out}:(x-r)^2+y^2=r^2\quad(r>0)$$

と x 軸に同時に接する円を $\mathfrak{C}_1$ とする．更に，$\mathfrak{C}_1$ と $\mathfrak{C}_{in}$，$\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_2$ とし，以下，$\mathfrak{C}_n$ と $\mathfrak{C}_{in}$，$\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_{n+1}$ と帰納的に定めるとき，$\mathfrak{C}_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の中心の座標と半径を求めよ．



ARISTOS

【W.3.2】

t を実数とする関数 $u(x)=(x-1)(x-2)(x-t)$ に対して，$u'(x)=0$ の 2 解を $a,\ b\ (a<b)$ と表す．t の関数 $|t-a|+|t-b|$ の $1 \leq t \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ．

ARISTOS

【W.3.3】

3 次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の 1 つの解を α とする.

(1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形の式で表せ. ただし, a, b, c は有理数とする.

(2) 上の 3 次方程式の α 以外の 2 つの解を (1) と同様の形式で表せ.

ARISTOS

【W.3.4】

$k=1,\,2,\,\cdots,\,n$ に対して，$\alpha_k \neq 0$ は互いに異なる複素数であり，次の性質を満たす．
集合 $\mathsf{A}=\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_n\}$ に対して，

$$\alpha_j \in \mathsf{A} \ \wedge\ \alpha_k \in \mathsf{A} \implies \alpha_j\,\alpha_k \in \mathsf{A} \quad \bigl(1 \leq \forall\, j,\, \forall k \leq n\bigr)$$

(1) 任意の $i\,(=1,2,\cdots,n)$ に対して，

$$\{\alpha_i\,\alpha_1,\,\alpha_i\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_i\,\alpha_n\} = \mathsf{A}$$

であることを示せ．

(2) A は 1 の n 乗根全体の集合であることを示せ．

ARISTOS