【W.4.1】

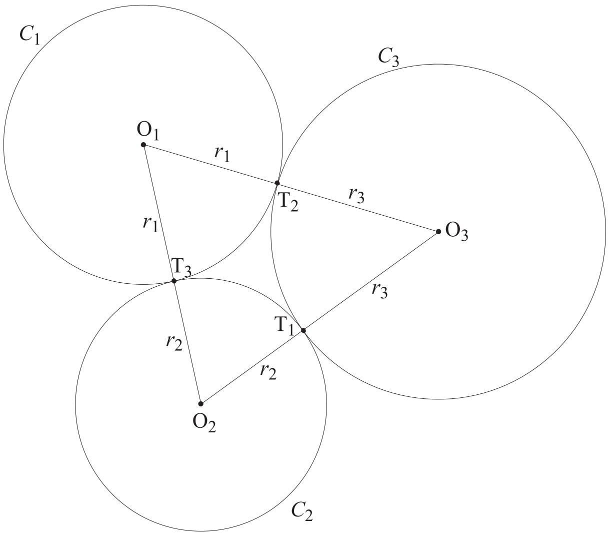
平面上で互いに外接する円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ に対して,

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2\text{の共通接線を }\mathfrak{L}_3,\quad \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3\text{の共通接線を }\mathfrak{L}_1,\quad \mathfrak{C}_3,\ \mathfrak{C}_1\text{の共通接線を }\mathfrak{L}_2$$

とするとき, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ は 1 点 I で交わることを示せ. 更に,

$$\mathfrak{C}_1\text{の中心と半径を }\mathrm{O}_1,\ r_1,\quad \mathfrak{C}_2\text{の中心と半径を }\mathrm{O}_2,\ r_2,\quad \mathfrak{C}_3\text{の中心と半径を }\mathrm{O}_3,\ r_3$$

とするとき, I は三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の内心であることを示し, 内接円の半径 r を求めよ.



【W.4.2】

xyz 空間内の点 P(0, 0, 1) を中心とする半径 1 の球面 $\mathfrak{K}$ 上の点 Q(a, b, c) が条件

$$a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 1$$

の下に $\mathfrak{K}$ 上を動くとき，Q において $\mathfrak{K}$ に接する平面 $\mathfrak{L}$ が x, y, z 座標軸と交わる点を A, B, C とする．このとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ．

【W.4.3】

関数 $u(x)$, $v(x)$ を

$$u(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}, \quad v(x) = x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{1}{120}$$

によって定めるとき，以下の事柄が成り立つことを示せ.

(1) 任意の実数 x に対して，$u(x) > 0$ である.

(2) 方程式 $v(x) = 0$ は唯一の実数解 α を持ち，$-1 < \alpha < 0$ を満たす.

【W.4.4】

次の有理数の整数部分の桁数と 1 の位の数字を求めよ.

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$$

ただし, $3^{21}=10460353203$ を用いてよい.