

**【W.5.1】**

正整数  $N$  の正の約数  $n$  に対して,

$$u(n) = n + \frac{N}{n} \quad (n : N \text{ の正の約数})$$

と定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $N = 2^k$  ( $k$ : 正整数) のとき,  $u(n)$  の最小値を求めよ.
- (2)  $N = 7!$  のとき,  $u(n)$  の最小値を求めよ.

【W.5.2】

座標空間内の4点

$$P(0, 0, 0), Q(a, 0, 0), R(0, 1, 0), S(0, 1, b) \quad (a > 0, b > 0)$$

が半径1の同一球面上にあるとき,

P, Q, R, Sを頂点とする四面体に内接する球の半径を  $r > 0$  とすれば,

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

なる不等式が同時に成り立つことを示せ.

**【W.5.3】**

円に内接する四角形 ABCD に対して,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot DB$$

が成り立つことを示せ.

【W.5.4】

多項式の列

$$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 1 + x, \dots, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \dots$$

を考える.

(1) 正整数  $n, m$  に対して,  $P_n(x)$  を  $P_m(x)$  で割った余りは,

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_{m-1}(x)$$

のいずれかであることを示せ.

(2) 等式

$$P_l(x) \times P_m(x^2) \times P_n(x^4) = P_{100}(x)$$

が成り立つような正整数の組  $(l, m, n)$  をすべて求めよ.