

【W.5.1】

正整数 N の正の約数 n に対して,

$$u(n) = n + \frac{N}{n} \quad (n : N \text{ の正の約数})$$

と定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $N = 2^k$ (k : 正整数) のとき, $u(n)$ の最小値を求めよ.
- (2) $N = 7!$ のとき, $u(n)$ の最小値を求めよ.

【W.5.2】

座標空間内の4点

$$P(0, 0, 0), Q(a, 0, 0), R(0, 1, 0), S(0, 1, b) \quad (a > 0, b > 0)$$

が半径1の同一球面上にあるとき、

P, Q, R, Sを頂点とする四面体に内接する球の半径を $r > 0$ とすれば、

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

なる不等式が同時に成り立つことを示せ.

【W.5.3】

円に内接する四角形 ABCD に対して,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot DB$$

が成り立つことを示せ.

【W.5.4】

多項式の列

$$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 1 + x, \dots, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \dots$$

を考える.

(1) 正整数 n, m に対して, $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは,

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_{m-1}(x)$$

のいずれかであることを示せ.

(2) 等式

$$P_l(x) \times P_m(x^2) \times P_n(x^4) = P_{100}(x)$$

が成り立つような正整数の組 (l, m, n) をすべて求めよ.