

【1.1】

媒介変数表示された曲線

$$\mathcal{C}: x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

の軌跡を図示せよ. また, \mathcal{C} の囲む閉領域の面積を求めよ.

【1.2】

関数 $u(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) について、次の各問いに答えよ.

- (1) 関数 $u(x)$ の極値を求めよ.
- (2) 不等式 $\log x < \sqrt{x}$ ($x > 0$) を示せ.
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$ を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} u(x)$ を求めよ.
- (5) $y = u(x)$ のグラフの概形を描け.
- (6) 不定方程式 $m^n = n^m$ ($0 < m < n$) を満たす整数の組 (m, n) をすべて求めよ.

【1.3】

関数 $u(x) = e^{-(1+x)}$ ($x > 0$) について、次の各問いに答えよ.

(1) $0 < x_1 < x_2$ を満たす実数 x_1, x_2 に対して,

$$|u(x_2) - u(x_1)| < M|x_2 - x_1|$$

を満たす実数 M ($0 < M < 1$) を 1 つ求めよ.

(2) 方程式 $u(x) = x$ の実数解は唯一存在することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = u(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、数列 $\{a_n\}$ は (2) の方程式の解に収束することを示せ.

【1.4】

a を定数とする.

$$a^x \geq ax \quad (a > 0, a \neq 1)$$

なる不等式がすべての $x > 0$ に対して成り立つとき, a に関する条件を求めよ.