

【2.1】

t の関数

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - t \sin x| \, dx$$

に対して、 $t > 0$ における $f(t)$ の最小値を与える t の値を求めよ。

更に、その最小値を求めよ。

【2.2】

半径 10 の円 \mathcal{C} に半径 3 の円 \mathcal{C}' が内接しながら滑ることなく回転する. 内接円 \mathcal{C}' 上の点 P が円 \mathcal{C} に接してから再び接するまでに描く曲線は円 \mathcal{C} を 2 つの領域に分割する. このとき, それぞれの領域の面積を求めよ.

【2.3】

$x > \frac{1}{3}$ に対して,

$$\frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \cdots + \frac{1}{n \log n} \geq x$$

を満たす最小の正整数 n を N_x で表す.

このとき,

$$e^x \log 2 \leq \log N_x \leq e^x \log 3$$

が成り立つことを示せ.

【2.4】

xy 平面上の曲線

$$C: x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

上に糸が張り付いており、これを $(0, 0)$ の点を持って弛むことなく剥がしていく。

糸が点 $P(\alpha - \sin \alpha, 1 - \cos \alpha)$ で曲線 C から離れているとき、持っている糸の端点を Q とする。

- (1) 原点から P までの曲線 C の長さを α を用いて表せ。
- (2) $0 < \alpha < 2\pi$ のとき、直線 PQ に向かって x 軸の正の方向から測った角を θ とするとき、

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

であることを示せ。ただし、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする。

- (3) $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ の範囲で α が動くとき、線分 PQ の通過する領域の面積を求めよ。

