【3.1】

xy 平面上の曲線

$$\mathfrak{C} : x^2 - xy + y^2 = 3$$

の囲む領域を $\mathfrak{D}$ とする．

(1) $\mathfrak{C}$ を原点中心に右回りに 45° 回転した曲線 $\mathfrak{C}'$ の方程式を求めよ．

(2) $\mathfrak{D}$ の $x \geq 0$ の部分を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ．

【3.2】

xyz 空間において，yz 平面上の双曲線

$$2y^2 - z^2 = 2 \ \wedge \ x = 0$$

を z 軸の周りに回転してできる曲面 $\mathfrak{S}$ と 2 つの平面

$$z = y + 1, \quad z = y - 1$$

によって囲まれる立体図形を $\mathfrak{K}$ とする．

(1) 曲面 $\mathfrak{S}$ の方程式を求めよ．

(2) 平面 $\pi : z = y + t \ (-1 \leq t \leq 1)$ による切口の図形の面積を求めよ．

(3) $\mathfrak{K}$ の体積を求めよ．

【3.3】

空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(0,\ 0\ 1),\quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

を頂点とする三角形の内接円を $\mathfrak{D}_1$，外接円を $\mathfrak{D}_2$ とする．
$\mathfrak{D}_1$ の外部にあり，$\mathfrak{D}_2$ の内部にある領域を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ．

【3.4】

原点 O を中心として回転する半直線 $\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{L}$ に接しながら動く半径 1 の円 $\mathfrak{C}$ がある．
時刻 $t=0$ において，$\mathfrak{L}$ は y 軸の負の部分に一致しており，$\mathfrak{C}$ は中心が $(1,\ 0)$ にあって，原点で $\mathfrak{L}$ に接している．
時刻 t において，$\mathfrak{L}$ は原点中心に正の向きに角 t だけ回転し，$\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{L}$ 上を滑らずに転がり，原点から $2t$ の距離の点 R で $\mathfrak{L}$ に接している．$\mathfrak{C}$ の中心を P とする．点 Q は $\mathfrak{C}$ の周上の定点で $t=0$ において原点にあるものとする．

(1) 時刻 t における 2 点 P, Q の座標を t の式で表せ．

(2) $0 \leq t \leq \pi/2$ における P の軌跡を $\mathfrak{K}_1$，Q の軌跡を $\mathfrak{K}_2$ とする．
2 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，2 点 $(\pi,\ 1)$, $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ で囲まれる領域の面積を求めよ．