

【5.1】

正整数 l を与える.

各正整数 n に対して, $y = x^l \sin nx$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) のグラフと x 軸で囲まれた領域を \mathcal{D}_n とする.

(1) \mathcal{D}_n を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を V_n と表すとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ の値を求めよ.

(2) \mathcal{D}_n を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を W_n と表すとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ の値を求めよ.

【5.2】

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

と定義する. ただし, $\sin^0 x = 1$ とする.

(1) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$I_n \geq I_{n+1}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$a_n = \left(\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1} \right)$$

と定義するとき, a_n を I_{2n}, I_{2n+1} を用いて表せ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

【5.3】

実数 x, y に対して、次の不等式の成立を示せ.

$$\sqrt{\tan x \tan y} \leq \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\tan x + \tan y}{2} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}, 0 \leq y < \frac{\pi}{4}\right)$$

【5.4】

$a > 0, b > 0, c > 0$ のとき, 不等式

$$\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}}{3}}$$

の成立を示せ. ただし, n は正整数とする.