【12.1】

2 次行列 $\mathbf{M}$, 正整数 n に対して,

$$\mathbf{M}^2 = \alpha \mathbf{M} \quad (\alpha \neq 0)$$

が成り立つとき,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E} + \mathbf{M})^k$$

を $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$ の 1 次式で表せ.

【12.2】

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^2$$

(1) 上の方程式が実数解 x, y, z, w を持つための a に関する必要十分条件を求めよ.

(2) (1) で求めた条件の下で, x, y, z, w をそれぞれ a の式で表せ.

【12.3】
2 次行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

に対して，trace.$\mathbf{M}$ = trace.$\mathbf{M}^2 = -1$ とするとき，

$$(\mathbf{M} + \mathbf{E})^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

を満たす $(x,\ y)$ を求めよ．

【12.4】

3 次行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

また, 3 次行列の列 $\{\mathbf{M}_n\}$ を次の式で定義する.

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{E},\ \mathbf{M}_2=\mathbf{A}+\mathbf{B},\quad \mathbf{M}_{n+2}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{BA}\cdot\mathbf{M}_n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{B}^n$, $\mathbf{AB}$ を求めよ. (2) $\mathbf{M}_{n+1}-\mathbf{AM}_n$ を求めよ. (3) $\mathbf{M}_n$ を求めよ.

ただし, n を正の整数とする.