【13.1】

双曲線

$$\mathfrak{C}_1 : ax^2 - by^2 = 1, \quad \mathfrak{C}_2 : ax^2 - by^2 = -1 \quad (a > 0,\, b > 0)$$

を考える.

$\mathfrak{C}_1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ $(x_0 > 0)$ に対して，P における $\mathfrak{C}_1$ の接線と $\mathfrak{C}_2$ との交点を Q_1, Q_2 とする.

更に，$\mathfrak{C}_2$ 上の点 Q_1, Q_2 における 2 接線の交点を R とする.

P が $\mathfrak{C}_1$ の $x > 0$ の部分を動くとき，R の軌跡の方程式を求めよ.

【13.2】

長軸の長さ 4, 短軸の長さ 2 の楕円に囲まれた領域を $\mathfrak{D}_1$ とする.
この楕円の短軸の方向に領域 $\mathfrak{D}_1$ を

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\ \left(=2\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

だけ平行移動して得られる領域を $\mathfrak{D}_2$ とするとき,
$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ の共通部分の領域 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\cap\mathfrak{D}_2$ の面積を求めよ.

【13.3】

xy 平面上において，2 定点

$$\mathrm{F}_1(a,\,a),\quad \mathrm{F}_2(-a,\,-a)\ \ (a>0)$$

からの距離の積が一定値 $2a^2$ となる点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする.

(1) 直交座標 $(x,\,y)$ に関する $\mathfrak{C}$ の方程式を求めよ.

(2) 原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\,\theta)$ に関する $\mathfrak{C}$ の方程式を求めよ.

(3) $\mathfrak{C}$ の囲む閉領域の面積を求めよ.

(4) 反転

$$x'=\frac{2a^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{2a^2y}{x^2+y^2}$$

による $\mathfrak{C}$ の像 $\mathfrak{C}'$ の方程式を $x',\,y'$ の関係式の形で導け.

【13.4】

座標軸上にない点 P$(x_0,\, y_0)$ を通る曲線

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \quad (a>b>0,\, \lambda \neq b^2,\, \lambda < a^2)$$

は 2 個存在し，それぞれ楕円と双曲線であることを示せ.

また，2 曲線は P において直交することを示せ.