【14.1】

xy 平面上の双曲線

$$\mathfrak{H} : x = t + \frac{1}{t},\ y = t - \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

に関して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{H}$ の 2 個の焦点の座標，漸近線の方程式を求めよ．

(2) $t > 1$ とする．$\mathfrak{H}$ 上の点

$$\mathrm{P}\left(t + \frac{1}{t},\, t - \frac{1}{t}\right)$$

における接線と 2 本の漸近線との交点を Q, R とする．

このとき，$\angle$QFR は一定であることを示し，その大きさを求めよ．

ただし，F は右側の焦点を表し，Q は上側の交点を表すものとする．

【14.2】

放物線 $\mathfrak{C} : y^2 = 4px \ (p > 0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ から $\mathfrak{C}$ の任意の接線に下ろした垂線の足 H の軌跡を求めよ．また，$\mathfrak{C}$ の異なる 3 本の接線の作る三角形の外接円は常に焦点 F を通ることを示せ．

【14.3】

$0 < a < 1$ なる定数 a に対して，次の方程式で与えられる曲線 $\mathfrak{C}$ を考える．

$$\mathfrak{C} : a^2(x^2+y^2) = (x^2+y^2-x)^2 \quad (0 < a < 1)$$

(1) $\mathfrak{C}$ の極方程式を求めよ．

(2) $\mathfrak{C}$ と x 軸および y 軸との交点の座標を求め，$\mathfrak{C}$ の概形を描け．

(3) $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，$\mathfrak{C}$ 上の点の x 座標の最大値・最小値，y 座標の最大値・最小値を求めよ．

【14.4】

楕円 $\mathfrak{E}_0$ と円 $\mathfrak{C}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{E}_0 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0), \quad \mathfrak{C} : x^2+y^2=r^2\ \ (r>a)$$

$\mathfrak{C}$ 上の点 P から $\mathfrak{E}_0$ に引いた 2 本の接線と $\mathfrak{E}_0$ との接点を Q_1, Q_2 とする．
P が $\mathfrak{C}$ 上を動くとき，直線 Q_1Q_2 は $\mathfrak{E}_0$ と焦点を共有するある楕円 $\mathfrak{E}_1$ に常に接する．
このとき，r を a, b の式で表し，この楕円 $\mathfrak{E}_1$ の方程式を求めよ．