【Example 1.1】

媒介変数表示

$$\mathfrak{C} : x = 2t^2 + 1,\ \ y = t^2 + t - 2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

で表される曲線 $\mathfrak{C}$ を図示し，曲線 $\mathfrak{C}$ と x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

Point

媒介変数関数 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ では，接ベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ によって増減表を作る

【解説】

媒介変数表示

$$x(t) = 2t^2 + 1, \quad y(t) = t^2 + t - 2 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

より，

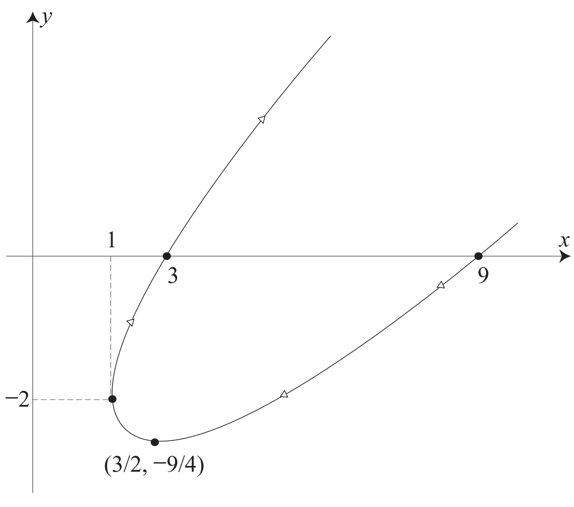
$$x'(t) = 4t, \quad y'(t) = 2t + 1 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

従って，増減表は次の通りである．

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(x,\ y)$	$(+\infty,\ +\infty)$	$\swarrow$	$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$	$\nwarrow$	$(1,\ -2)$	$\nearrow$	$(+\infty,\ +\infty)$

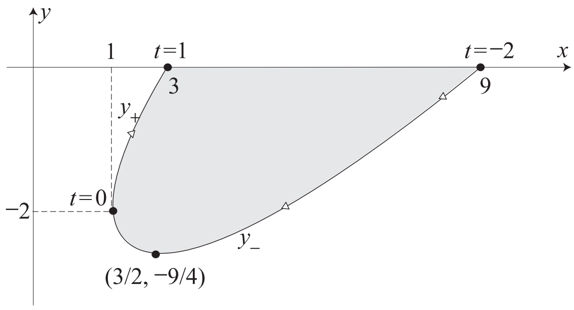
増減表により，グラフは次の通りである．

[Note]　$x'(t) = 4t$ より，
$x' > 0\ (t > 0)$ のとき，t が増加すると x も増加する．
$x' < 0\ (t < 0)$ のとき，t が減少すると x は増加する．



次に，面積について調べる．
$t<0$ に対応する $\mathfrak{C}$ の部分を y_-，$t>0$ に対応する $\mathfrak{C}$ の部分を y_+ で表すと，
$\mathfrak{C}$ と x 軸の囲む領域の面積は次の積分で定義される．

$$\int_{x=1}^{x=9}(-y_-)\,\mathbf{d}x-\int_{x=1}^{x=3}(-y_+)\,\mathbf{d}x$$
$$=-\int_{t=0}^{t=-2}(t^2+t-2)\,\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t+\int_{t=0}^{t=1}(t^2+t-2)\,\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t$$
$$=\int_{t=-2}^{t=1}(t^2+t-2)\cdot 4t\,\mathbf{d}t=\left[t^4+\frac{4}{3}t^3-4t^2\right]_{-2}^{1}=9 \quad \cdots\cdots(1.3)$$



[Note]　$y_+,\,y_-$ はそれぞれ異なる x の式で定義され，それ故，x 軸と $\mathfrak{C}$ の囲む領域の面積も 2 つの異なる積分式で表されるが，媒介変数 t を用いれば同一の式 $y=t^2+t-2$ で定義される．従って，(1.1) で定義される変数変換によって，t の積分 (置換積分) として計算するのが最も効率的である．

【Review 1.1.1】　– Cardioid –

媒介変数表示

$$\mathfrak{C}: x=(1+\cos t)\cos t,\quad y=(1+\cos t)\sin t \quad (0\leq t<2\pi)$$

で表される曲線 $\mathfrak{C}$ を図示し，曲線 $\mathfrak{C}$ によって囲まれる図形の面積を求めよ．

[答] $\dfrac{3\pi}{2}$

【Review 1.1.2】　93 東大

時刻 t における座標が

$$x=2\cos t+\cos 2t,\quad y=\sin 2t \quad (0\leq t<2\pi)$$

で表される xy 平面上の動点 P について考える．

(1) P の描く曲線の概形を図示し，P が 2 回以上通過する点の座標を求めよ．

(2) P の描く曲線の囲む領域の面積を求めよ．

[答] (1) $(-1,\,0)$　(2) 2π

【Example 1.2】

$x>0 \wedge x \neq 1$ とするとき，次の不等式の成立を証明せよ．

(1) $\dfrac{1+x}{2} > \dfrac{x-1}{\log x} > \sqrt{x}$ (2) $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{a-b}{\log a - \log b} > \sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0,\ a \neq b)$

Point

$$\left\{\begin{array}{c}\text{不等式の証明問題}\\ \text{方程式 (不等式) の解に関する問題}\end{array}\right. \text{は，グラフ化 (視覚化) して議論する}$$

【解説】

(1) ● $x>1$ の範囲において，

$$\frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} > \log x > \frac{2(x-1)}{1+x}$$

● $0<x<1$ の範囲において，

$$\frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \log x < \frac{2(x-1)}{1+x}$$

と同値変形できる．

● $x>1$ の場合;

$u(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} - \log x$ と置き，$u(x)$ の増減を調べる．

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \quad (\because\ x>1)$$

より，$u(x)$ は $x>1$ において**単調増加**であり，

$$u(x) > u(1) = 0 \quad (\because\ x>1)$$

従って，

$$u(x) > 0 \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} > \log x$$

次に，$v(x) = \log x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ と置く．

$$v(x) = \log x + \frac{4}{x+1} - 2$$

と変形できるので，

$$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \quad (\because\ x>1)$$

これより，$v(x)$ は $x>1$ において**単調増加**であり，

$$v(x) > v(1) = 0 \iff \log x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

● $0<x<1$ の場合; 上と同様の方針で証明できる．

(2) 与不等式の両辺を $b\,(>0)$ で割り，$\dfrac{a}{b}=x$ と置けば，

$$\frac{a+b}{2}>\frac{a-b}{\log a-\log b}>\sqrt{ab} \iff \frac{1+\dfrac{a}{b}}{2}>\frac{\dfrac{a}{b}-1}{\log\dfrac{a}{b}}>\sqrt{\frac{a}{b}} \iff \frac{1+x}{2}>\frac{x-1}{\log x}>\sqrt{x}$$

となるので，(1) の結果により確かに成立する．

[Note]　不等式を同値変形して，$\log x$ の項を孤立させたのが (1) の計算上のポイントである．
何故なら，$\dfrac{x-1}{\log x}$ は何回微分しても分子に $\log x$ が残り，導関数の符号判定が困難になるからである．

【Review 1.2.1】　89 福岡大

(1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の極値，変曲点を調べて，グラフの概形をかけ．

(2) 任意の正数 α に対して，

$$\mathbf{e}^{\alpha}\geq\alpha^{\mathbf{e}}$$

となることを示せ．ただし，$\mathbf{e}$ はネイピア数 $(\mathbf{e}=2.71828\cdots)$ とする．

[証明略]

【Review 1.2.2】　2001 名古屋市大

(1) $x\geq 1$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x\log x\geq(x-1)\log(x+1)$$

(2) 正整数 n に対して，次の不等式を示せ．

$$(n!)^2\geq n^n$$

[証明略]

【Example 1.3】

関数 $u(x) = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}x}$ $(x > 0)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $0 < x_1 < x_2$ を満たす x_1, x_2 に対して，

$$\left| u(x_2) - u(x_1) \right| < \frac{1}{2} \left| x_2 - x_1 \right|$$

が成り立つことを示せ．

(2) 方程式 $u(x) = x$ の実数解は唯一存在することを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = u(a_n)$$

このとき，数列 $\{a_n\}$ は (2) の方程式の解に収束することを示せ．

Point (平均値の定理)

関数 $u(x)$ が $x_1 \leq x \leq x_2$ において連続かつ微分可能なとき，

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(\xi) \ \wedge \ x_1 < \xi < x_2$$

を満たす実数 ξ が存在する．

Point

平均値の定理を利用して不等式を証明する

【解説】

(1) 関数 $u(x)$ は，$x > 0$ において連続かつ微分可能であるから，
$0 < x_1 < \xi < x_2$ を満たす実数 ξ に対して，次の等式が成立する．

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(\xi) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\xi} \quad (\because \textbf{平均値の定理}) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) の両辺の絶対値をとり，

$$\left| u(x_2) - u(x_1) \right| = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\xi} \left| x_2 - x_1 \right| \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

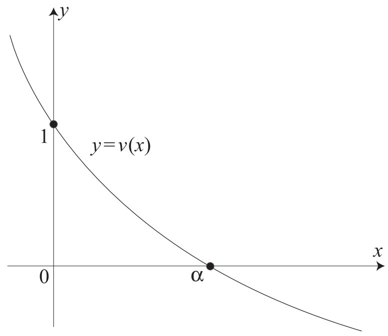
ここで，$\xi > 0$ であるから，

$$\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\xi} < \mathbf{e}^0 = 1 \quad \left(\because \ \mathbf{e}^x \text{の単調増加性}\right) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.2) の右辺を評価して，

$$\left| u(x_2) - u(x_1) \right| = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\xi} \left| x_2 - x_1 \right| < \frac{1}{2} \times \mathbf{e}^0 \times \left| x_2 - x_1 \right| = \frac{1}{2}\left| x_2 - x_1 \right| \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(2) **(右図参照)**



$$u(x) = x \iff \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}x} - x = 0 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) 左辺を $v(x)$ と置き，$v(x)$ のグラフを調べる．

$$v'(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}x} - 1 < 0 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

従って，$v(x)$ は**単調減少**であり，更に，

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = 0 - \infty = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

より，$y = v(x)$ は x 軸と 1 回だけ交わる．
その交点を $x = \alpha$ とすれば，$v(0) = 1 > 0$ より，$\alpha > 0$ である．
従って，方程式 $u(x) = x$ は唯一の実数解 $\alpha\,(>0)$ を持つ．

(3) (1) の不等式を用いて，

$$\left|a_n - \alpha\right| = \left|u(a_{n-1}) - u(\alpha)\right| < \frac{1}{2}\left|a_{n-1} - \alpha\right|$$

$$\therefore \quad \left|a_n - \alpha\right| < \frac{1}{2}\left|a_{n-1} - \alpha\right| \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) を繰り返し用いて不等式の右辺を評価すると，

$$0 \leq \left|a_n - \alpha\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|a_1 - \alpha\right| \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.8) において，$n \to \infty$ とすれば，**ハサミウチの原理**により，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

Comment

数列の収束を議論するために，**平均値の定理**を用いるという手法は典型的で，入試では古典的な頻出問題である．証明の流れを正確に理解して，定石の解法パターンとして記憶してしまおう !!

【Review 1.3.1】　90 広島大

任意の実数 $x,\ h$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $\left|\sin(x+h)-\sin x\right| \leqq |h|$　　(2) $\left|\cos(x+h)-\cos x+h\sin x\right| \leqq h^2$

[証明略]

【Review 1.3.2】

関数 u を区間 $[a,\ b]$ で連続な関数とするとき，

$$v(x)=\int_a^b \left\{u(t)-u(x)\right\}^2 \mathbf{d}t$$

の最小値を求めよ．

[答] $\displaystyle\int_a^b u(t)^2\,\mathbf{d}t-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u(t)\,\mathbf{d}t\right)^2$

[Note]　関数 u が区間 $[a,\ b]$ で連続のとき，

$$\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x=(b-a)\,u(\xi)\ \wedge\ a<\xi<b$$

を満たす実数 ξ が存在する．**(積分の第一平均値の定理)**