

【Example 1.1】

媒介変数表示

$$C: x = 2t^2 + 1, y = t^2 + t - 2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

で表される曲線 C を図示し、曲線 C と x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ.**Point**媒介変数関数 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ では、接ベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に注目する**【解説】**

媒介変数表示

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 + 1 \\ y(t) = t^2 + t - 2 \end{cases} \text{ より, } \begin{cases} x'(t) = 4t & \dots\dots(1.1) \\ y'(t) = 2t + 1 & \dots\dots(1.2) \end{cases}$$

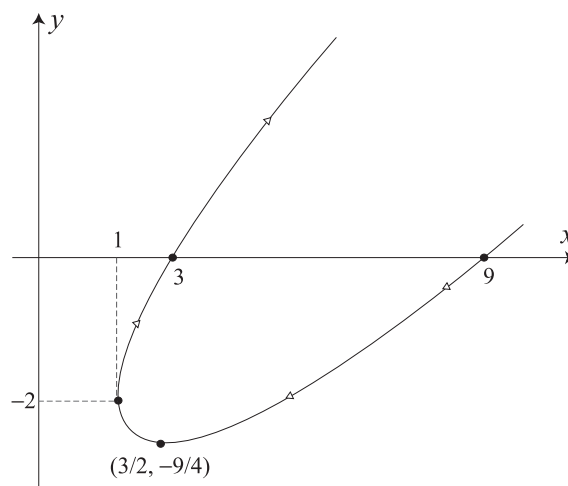
(1.1), (1.2) より関数 $y(t)$ の導関数 $y'(x)$ は,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t+1}{4t} \quad \dots\dots(1.3)$$

であるから、増減表は次の様である.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		-	-	-	0	+	
$y'(t)$		-	0	+	+	+	
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	×	+	
(x, y)	$(+\infty, +\infty)$	↙	$(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$	↘	$(1, -2)$	↗	$(+\infty, +\infty)$

従って、グラフは下図の様である.



[Note] $x'(t) = 4t$ より,

$x' > 0$ ($t > 0$) のとき, t が増加すると x も増加する.

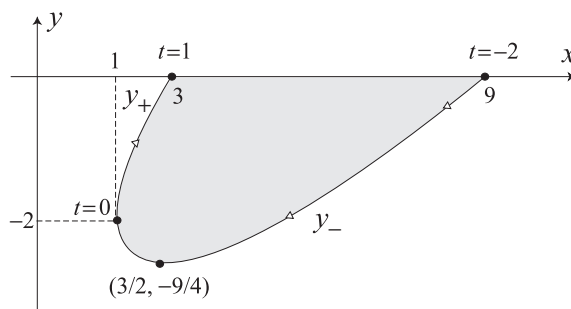
$x' < 0$ ($t < 0$) のとき, t が減少すると x は増加する.

次に, 面積について調べる.

曲線の $t < 0$ の部分を y_- , $t > 0$ の部分を y_+ で表すと,

曲線と x 軸の囲む面積は次の積分で定義される (右図).

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{x=9} (-y_-) dx - \int_{x=1}^{x=3} (-y_+) dx \\ = - \int_{t=0}^{t=-2} (t^2 + t - 2) \frac{dx}{dt} dt + \int_{t=0}^{t=1} (t^2 + t - 2) \frac{dx}{dt} dt \quad (\because \text{置換積分}) \\ = \int_{-2}^1 (t^2 + t - 2) \cdot 4t dt = \left[t^4 + \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 \right]_{-2}^1 = 9 \quad \dots\dots(1.4) \end{aligned}$$



[Note] 2 曲線 y_+ , y_- はそれぞれ異なる x の式で定義され, それ故, x 軸と囲む領域の面積も 2 つの異なる積分式で表されるが, parameter t を用いれば同一の式 $y = t^2 + t - 2$ で定義される. 従って, 置換積分によって t の積分として計算するのが効率的である.

【Review 1.1.1】 Cardioid

媒介変数表示

$$\mathcal{C}: x = (1 + \cos t) \cos t, \quad y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で表される曲線 \mathcal{C} を図示し, 曲線 \mathcal{C} によって囲まれる図形の面積を求めよ.

[答] $\frac{3\pi}{2}$

【Review 1.1.2】 93 東大

時刻 t における座標が

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で表される xy 平面上的動点 P について考える.

- (1) P の描く曲線の概形を図示し, P が 2 回以上通過する点の座標を求めよ.
- (2) P の描く曲線の囲む領域の面積を求めよ.

[答] (1) $(-1, 0)$ (2) 2π

【Example 1.2】

$x > 0 \wedge x \neq 1$ とするとき、次の不等式を証明せよ.

$$(1) \frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x} \quad (2) \frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{\log a - \log b} > \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

Point

$\left\{ \begin{array}{l} \text{不等式の証明問題} \\ \text{方程式 (不等式) の解に関する問題} \end{array} \right.$
 は、増減を調べてグラフで考える

【解説】

(1) (A) $x > 1$ の範囲で、

$$\frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} > \log x > \frac{2(x-1)}{1+x}$$

(B) $0 < x < 1$ の範囲で、

$$\frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \log x < \frac{2(x-1)}{1+x}$$

と変形できる.

(A) の場合;

まず、 $u(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \log x$ と置き、 $u(x)$ の増減を調べる.

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \quad (\because x > 1)$$

より、 $u(x)$ は $x > 1$ において単調増加であり、

$$u(x) > u(1) = 0 \quad (\because x > 1)$$

従って、

$$u(x) > 0 \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} > \log x$$

次に、 $v(x) = \log x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ と置く.

$$v(x) = \log x + \frac{4}{x+1} - 2$$

と変形できるので、

$$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \quad (\because x > 1)$$

これより、 $v(x)$ は $x > 1$ において単調増加.

従って、

$$v(x) > v(1) = 0 \iff \log x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

(B) についても同様の方針で証明できる.

(2) 与不等式の両辺を $b (> 0)$ で割り, $\frac{a}{b} = x$ と置けば,

$$\frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{\log a - \log b} > \sqrt{ab} \iff \frac{1+a/b}{2} > \frac{a/b-1}{\log(a/b)} > \sqrt{\frac{a}{b}} \iff \frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x} > \sqrt{x}$$

となるので, (1) の結果より確かに成立する.

[Note] 不等式を同値変形して, $\log x$ の項を孤立させたのが (1) の計算上のポイントである.

何故なら, $\frac{x-1}{\log x}$ は何回微分しても分子に $\log x$ が残り, 導関数の符号判定が困難になるからである.

【Review 1.2.1】 89 福岡大

- (1) 関数 $\frac{\log x}{x}$ の極値, 変曲点を調べて, グラフの概形をかけ.
 (2) 任意の正数 α に対して,

$$e^\alpha \geq \alpha^e$$

となることを示せ. ただし, e はネイピア数 ($e = 2.71828\dots$) とする.

[証明略]

【Review 1.2.2】 01 名古屋市大

- (1) $x \geq 1$ のとき, 次の不等式を示せ.

$$x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$$

- (2) 正整数 n に対して, 次の不等式を示せ.

$$(n!)^2 \geq n^n$$

[証明略]

【Example 1.3】

関数 $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ ($x > 0$) について、次の各問に答えよ。

(1) $0 < x_1 < x_2$ なる x_1, x_2 に対して、

$$|u(x_2) - u(x_1)| < \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $u(x) = x$ の実数解は唯一存在することを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = u(a_n)$$

このとき、数列 $\{a_n\}$ は (2) の方程式の解に収束することを示せ。

Point (平均値の定理)

関数 $u(x)$ が区間 $[x_1, x_2]$ で連続かつ微分可能なとき、次の実数 ξ が存在する。

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(\xi) \quad \wedge \quad x_1 < \xi < x_2$$

Point

平均値の定理を利用して不等式を証明する

【解説】

(1) 関数 $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ は、 $x > 0$ において連続かつ微分可能であるから、平均値の定理により、 $0 < x_1 < \xi < x_2$ を満たすある実数 ξ に対して、

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\xi} \quad \dots\dots(3.1)$$

(3.1) の両辺の絶対値をとり、

$$|u(x_2) - u(x_1)| = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\xi}|x_2 - x_1| \quad \dots\dots(3.2)$$

ここで、 $\xi > 0$ であるから、

$$e^{-\frac{1}{2}\xi} < e^0 = 1 \quad (\because e^x \text{の単調増加性}) \quad \dots\dots(3.3)$$

(3.2) の右辺を評価して、

$$|u(x_2) - u(x_1)| = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\xi}|x_2 - x_1| < \frac{1}{2} \times e^0 \times |x_2 - x_1| \quad \dots\dots(3.4)$$

(2) (右図参照)

$$u(x) = x \iff e^{-\frac{1}{2}x} - x = 0 \quad \dots\dots(3.5)$$

(3.5) 左辺を $v(x)$ と置き, $v(x)$ のグラフを調べる.

$$v'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - 1 < 0 \quad \dots\dots(3.6)$$

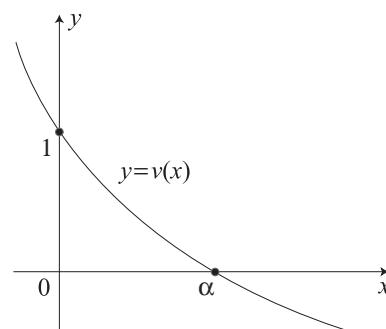
従って, $v(x)$ は単調減少であり, 更に,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0 - \infty = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

であるから, 曲線 $y = v(x)$ は x 軸と 1 回だけ交わる.

その交点を $x = \alpha$ とすれば, $v(0) = 1 > 0$ より, $\alpha > 0$ である.

従って, 方程式 $u(x) = x$ は唯一の実数解 $\alpha (> 0)$ を持つ.



(3) (1) の不等式を用いて,

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= |u(a_{n-1}) - u(\alpha)| < \frac{1}{2} |a_{n-1} - \alpha| \\ \therefore |a_n - \alpha| &< \frac{1}{2} |a_{n-1} - \alpha| \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots(3.7) \end{aligned}$$

(3.7) を繰り返し用いて不等式の右辺を評価すると,

$$0 \leq |a_n - \alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \alpha| \quad \dots\dots(3.8)$$

(3.8) において, $n \rightarrow \infty$ とすれば, ハサミウチの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \dots\dots(3.9)$$

Comment

数列の収束を議論するために, 平均値の定理を用いるという手法は典型的で, 入試では古典的な頻出問題である. 証明の流れを正確に理解して, 定石の解法パターンとして覚えてしまおう!!

【Review 1.3.1】 90 広島大

任意の実数 x, h に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(1) |\sin(x+h) - \sin x| \leq |h| \quad (2) |\cos(x+h) - \cos x + h \sin x| \leq h^2$$

[証明略]

【Review 1.3.2】

関数 u を区間 $[a, b]$ で連続な関数とすると,

$$v(x) = \int_a^b \{u(t) - u(x)\}^2 dt$$

の最小値を求めよ.

$$[\text{答}] \int_a^b u(t)^2 dt - \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b u(t) dt \right)^2$$

[Note] 関数 u が区間 $[a, b]$ で連続のとき,

$$\int_a^b u(x) dx = (b-a)lu(\xi) \quad \wedge \quad a < \xi < b$$

を満たす実数 ξ が存在する. (積分の第一平均値の定理)