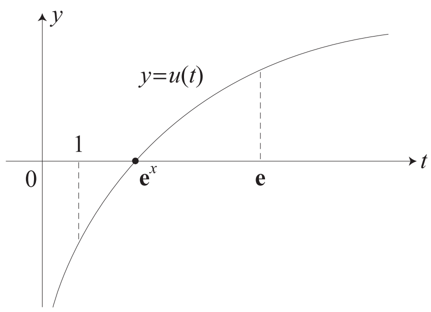
【Example 2.1】
x の関数 $I(x) = \int_{t=1}^{t=\mathbf{e}} |\log t - x|\,\mathbf{d}t$ の $0 < x < 1$ における最小値を求めよ.

Point
$\int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x$ は $u(x)$ の符号により場合分け. 即ち, 被積分関数の絶対値を外してから積分する

【解説】

$u(t) = \log t - x$ と置けば, $u(t) = 0 \iff t = \mathbf{e}^x$
即ち, $y = u(t)$ のグラフは**右上図**であり,

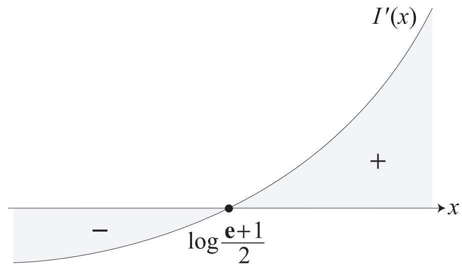


$$I(x) = \int_{t=1}^{t=\mathbf{e}^x} (-u(t))\,\mathbf{d}t + \int_{t=\mathbf{e}^x}^{t=\mathbf{e}} u(t)\,\mathbf{d}t$$
$$= U(\mathbf{e}) - 2U(\mathbf{e}^x) + U(1) \quad (U(t) = t\log t - t - xt)$$
$$= 2\mathbf{e}^x - (\mathbf{e}+1)x - 1$$

これより, $I(x)$ の極値を求めると,

$$I'(x) = 2\mathbf{e}^x - (\mathbf{e}+1) = 0 \iff x = \log\frac{\mathbf{e}+1}{2}$$

従って, $I'(x)$ のグラフは**右下図**であり,
$I(x)$ は $x = \log\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ で極小かつ**最小**.



$$\therefore\ \min .I(x) = (\mathbf{e}+1) - (\mathbf{e}+1)\log\frac{\mathbf{e}+1}{2} - 1$$
$$= (\mathbf{e}+1)\log\frac{2\mathbf{e}}{\mathbf{e}+1} - 1 \quad \cdots\cdots[\textbf{答}]$$

[Note]　関数 $I(x)$ の最小値を与える x は次の **[定理 (A)]** により瞬時に求められる.
ただし, 最小値そのものは $I(x)$ を定義する積分を計算しなければならない.

Theorem (A)

$a \leq x \leq b$ で定義された x の関数

$$I(x) = \int_{t=a}^{t=b} |u(t) - u(x)|\,\mathbf{d}t$$

は, $x = \dfrac{a+b}{2}$ で最小値をとる. ただし, u は区間 $[a, b]$ において単調な関数とする.

例題に対して，**定理 (A)** を適用してみる．

$$I(x)=\int_{t=1}^{t=\mathbf{e}}|\log t-x|\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

において，$x=\log s$ と置けば，

$$I(x)=\int_{t=1}^{t=\mathbf{e}}|\log t-\log s|\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

定理により，$I(x)$ は $s=\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ で最小となるので，

$$s=\frac{\mathbf{e}+1}{2} \iff x=\log\frac{\mathbf{e}+1}{2} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

即ち，$I(x)$ は $x=\log\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ において最小値をとり，例題に対して**定理 (A)** が確認された．
更に，より一般的な関数に拡張された次の**定理 (B)** も成り立つ．

Theorem (B)

$a\leq x\leq b$ で定義された x の関数

$$I(x)=\int_{t=a}^{t=b}v(t)|u(t)-u(x)|\,\mathbf{d}t$$

を最小化する $x=m\ (a<m<b)$ は，

$$\int_a^m v(x)\,\mathbf{d}x=\int_m^b v(x)\,\mathbf{d}x$$

を満たす．ここで，u は $[a,\,b]$ において単調であり，$v>0$ を満たすとする．

【Review 2.1.1】

x の関数

$$I(x)=\int_0^1|t\mathbf{e}^t-x|\,\mathbf{d}t$$

を最小にする x の値とその最小値を求めよ．

[答] 最小値 $\sqrt{\mathbf{e}}-1\ \left(x=\dfrac{\sqrt{\mathbf{e}}}{2}\right)$

【Review 2.1.2】 92 東工大

x の関数

$$I(x)=\int_0^1\frac{|t-x|}{t+1}\,\mathbf{d}t$$

の最小値を与える x の値を求めよ．

[答] $\sqrt{2}-1$

【Example 2.2.1】 – Cycloid –

半径 1 の円 $\mathfrak{D}$ が原点 O で x 軸に接している．$\mathfrak{D}$ を右方向に滑らずに回転させるとき，最初 O にあった $\mathfrak{D}$ 上の点 P が描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{D}$ の回転角を t $(0 \leq t < 2\pi)$ とするとき，P の位置 (x, y) を t の式で表せ．

(2) $\mathfrak{C}$ と x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

Point

$$\text{Parameter 曲線と } x \text{ 軸の囲む面積} \implies \int_{x_1}^{x_2} |y|\,\mathbf{d}x = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t$$

ただし，$x_1 < x_2$ であり，$x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ とする．

【解答】

(1) **下図**により，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ が成り立つ．

ここで，O$'$ は円 $\mathfrak{D}$ の中心である．

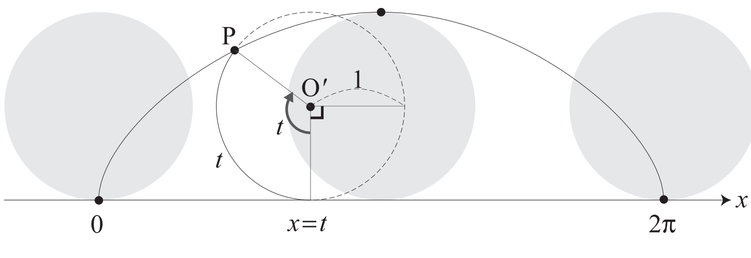
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2 - t) \\ \sin(-\pi/2 - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

従って，

$$\begin{cases} x = x(t) = t - \sin t \\ y = y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \qquad \cdots\cdots[\textbf{答}]$$

(2) P の parameter 表示により，

$$\begin{aligned}(\text{面積}) &= \int_{x=0}^{x=2\pi} |y|\,\mathbf{d}x = \int_{t=0}^{t=2\pi} y(t) \frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,\mathbf{d}t = 4 \times \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\,\mathbf{d}t = 16 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \tau\,\mathbf{d}\tau \quad \left(\because\ \tau = \frac{t}{2}\right) \\ &= 16 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi \quad \cdots\cdots[\textbf{答}]\end{aligned}$$



[Note]

(2) の面積計算の最終行では,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathbf{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

なる積分漸化式を用いた．即ち,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathbf{d}x$$

として，部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,\mathbf{d}x = \Big[-\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,\mathbf{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,\mathbf{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \qquad \cdots\cdots(2.1.2) \end{aligned}$$

(2.1.2) を I_n について解き,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

(2.1.3) において，$n=4$ として,

$$I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathbf{d}x = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

一般に,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{even}) \\ \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2}{3}\times 1 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

となり，積分計算が飛躍的に効率化される．

また，この漸化式は $\cos^n x$ の積分に対しても成り立つ．即ち,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

に対して,

$$J_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{even}) \\ \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2}{3}\times 1 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.1.7)$$

これらの漸化式は高次の三角関数の積分に対しては非常に強力であるが，区間が $[0,\,\pi/2]$ の場合に限定される．

一般の積分区間に対しては，次の漸化式を用いる．

$$\int_a^b \sin^n x\,\mathbf{d}x = \left[-\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x\right]_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \sin^{n-2} x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

【Review 2.2.1】 – Epicycloid –

原点を中心とする半径 4 の円を $\mathfrak{C}_1$, 点 (5, 0) を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_2$ とする. $\mathfrak{C}_2$ が $\mathfrak{C}_1$ の周上を反時計周りに滑らずに転がり元の位置に戻るとき, 最初に (4, 0) にあった $\mathfrak{C}_2$ 上の点 P の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする. このとき, $\mathfrak{C}$ が囲む図形の面積を求めよ.

[答] 30π

【Review 2.2.2】 – Cardioid –

原点を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_1$, 点 (2, 0) を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_2$ とする. $\mathfrak{C}_2$ が $\mathfrak{C}_1$ の周上を反時計周りに滑らずに転がり元の位置に戻るとき, 最初に (1, 0) にあった $\mathfrak{C}_2$ 上の点 P の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする. このとき, $\mathfrak{C}$ が囲む図形の面積を求めよ.

[答] 6π

【Review 2.2.3】 – Trochoid –

両端を P, Q とする長さ $a\,(>1)$ の棒をその一端 P が半径 1 の円板の中心に一致するように円板に貼り付ける. この棒の付いた円板を両端 P, Q がそれぞれ 2 点 (0, 1), $(0,\ 1-a)$ に一致するように xy 平面上に置き, その円板の周が x 軸上を滑ることなく正の向きに円板を転がす. 点 Q の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とするとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 円板が角 θ だけ回転したときの Q の座標は,

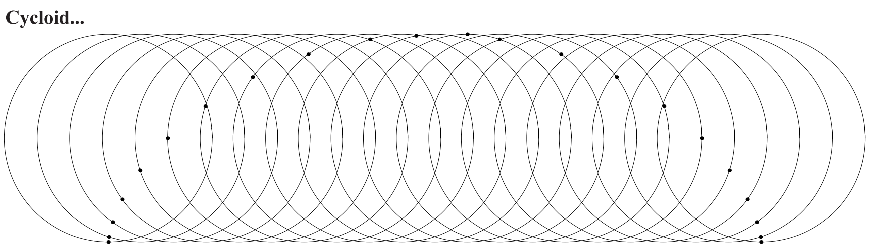
$$x=\theta-a\sin\theta,\quad y=1-a\cos\theta$$

と表せることを示せ.

(2) 円板が一定の速さで転がるとき, Q の速さが最大となる θ の値を求めよ.

(3) $a=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, $\mathfrak{C}$ と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

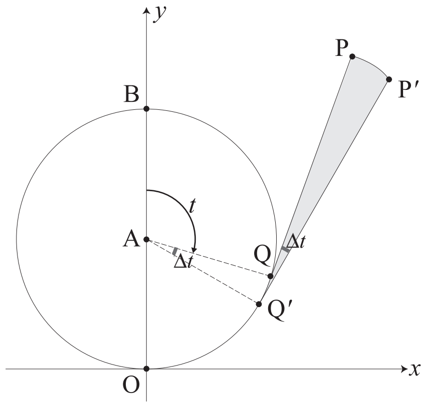
[答] (2) $\theta=\pi$ (3) $\dfrac{\pi^3}{108}+\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{72}-\dfrac{\pi}{6}$



【Example 2.2.2】 – Involute –

原点を O とし，平面上に 2 点 A(0, 1), B(0, 2) をとる．OB を直径とする半径 1 の円の $x \geq 0$ の部分を Γ とする．長さ π の糸が一端を O に固定して Γ に巻き付けてある．この糸の他の端点 P を引き，それが x 軸に達するまで緩むことなく解いていく．糸と半円の接点を Q とし，$\angle\mathrm{BAQ} = t$ とするとき，P が描く曲線 $\mathfrak{C}$ と x 軸および Γ で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

【解説】



t が $\Delta t > 0$ だけ増加したときの図形 QQ′P′P を考える．弧 QQ′ は，Δt が十分小さいときは点 Q における接線の一部と見なしてよく，3 点 Q′, Q, P は同一直線 (Q における接線) 上に乗る．この線分 Q′P の長さは $t + \Delta t$ であるから，図形 Q′P′P を中心角 Δt の扇形と見なして，

$$\Delta S = \frac{1}{2}(t+\Delta t)^2 \Delta t = \frac{1}{2}\left(t^2\Delta t + 2t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3\right) \cong \frac{1}{2}t^2\Delta t \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

(2.2.1) を扇形の面積の (1 次) 近似と考えてよいので，

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{d}t = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

Comment

「1 次近似と考えてよい」とは，微小量 Δt の 2 次以上の項を無視することである．
即ち，次のような計算過程をパスして，(2.2.1) から (2.2.2) に直結させて結果を得ることである．
[**省略部分**] $t \to t+\Delta t$ と変化したときに線分 PQ が通過する領域の面積を ΔS で表すと，

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}(t+\Delta t)^2\Delta t \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

(2.2.3) の両辺を $\Delta t > 0$ で割り，$\Delta t \to 0$ とすると，

$$\frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2\right) = \frac{1}{2}t^2 \iff S = \int_0^t \frac{1}{2}t^2\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

「回転体の体積 (Cylinder 型分割)」においても，この 1 次近似の考え方を採るので参照せよ．
上の方法に依らずに実直に計算する次の解法と比較してほしい．

【別解】

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/2-t)\\ \sin(\pi/2-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = -t \times \begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{d}(\sin t)}{\mathbf{d}t}\\ \dfrac{\mathbf{d}(\cos t)}{\mathbf{d}t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は点 Q における円の接線方向の長さが t のベクトルである．

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix}\sin t - t\cos t\\ 1+\cos t + t\sin t\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

$\mathfrak{C}$ は x 軸の上側にあるので，$\mathfrak{C}$ と x 軸の囲む領域の面積は，

$$\int_{x=0}^{x=\pi} y\,\mathbf{d}x = \int_{t=0}^{t=\pi} y(t)x'(t)\,\mathbf{d}t = \int_0^{\pi}(1+\cos t+t\sin t)(t\sin t)\,\mathbf{d}t = \cdots\cdots = \frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

(2.2.5) から半円の面積 $\pi/2$ を除けば，(2.2.2) と同様の結果を得る．

【Review 2.2.4】 – 等角螺旋 (Spiral) –

Parameter 曲線

$$\begin{cases} x = \mathbf{e}^{-t}\cos t \\ y = \mathbf{e}^{-t}\sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸の囲む領域の面積を求めよ.

[答] $\dfrac{1-\mathbf{e}^{-2\pi}}{4}$

【Review 2.2.5】 – Lemniscate –

極方程式

$$r(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

で表される曲線によって囲まれる領域の面積を求めよ.

[答] 2

【Example 2.3】

(1) 正整数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

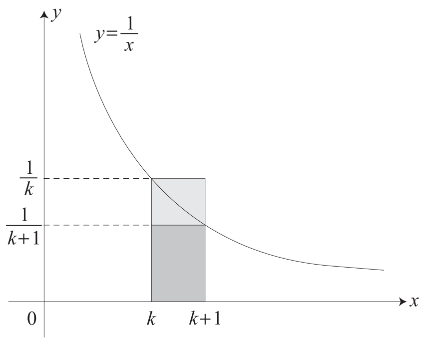
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x$$

(2) $5 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 9$ を満たす正整数 n を 1 つ求めよ.

Point

(積分を含む) 不等式の証明問題 $\Longrightarrow$ 面積による評価 (大小比較)

【解説】



(1) 曲線 $y = \frac{1}{x}$ の区間 $[k,\ k+1]$ における小長方形の面積,
曲線と x 軸の囲む部分の面積，大長方形の面積を比較して，(**右図**)

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x < \frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) の左辺と中辺において，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ についての和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x$$

$$\iff 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.1) の中辺と右辺において，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ についての和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.2), (3.3) により，

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

を得る.

(2) (3.4) の不等式における積分を実行して，

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

ここで，$2 < \mathbf{e} < 3$ であるから，

$$\begin{cases} 5 = \log \mathbf{e}^5 < \log 3^5 < \log(n+1) \\ 1 + \log n < 1 + \log 2^8 < 1 + \log \mathbf{e}^8 = 9 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) より，$3^5 - 1 < n < 2^8$ を満たす n を 1 つ決めればよいので，

$$n = 243,\ 244,\ 245,\ \cdots\cdots,\ 255 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

【Review 2.3.1】 97 京大

(1) $0 \leq \alpha < \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を示せ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x\,\mathbf{d} + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x\,\mathbf{d}x > (\beta-\alpha)(\sin\alpha + \sin(\pi-\beta))$$

(2) 次の不等式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{7} \sin\frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$$

[証明略]

【Review 2.3.2】

$u(x) \geq 0$ $(x>0)$ を満たす単調減少関数 $u(x)$ について，次の命題 (P)，(Q) は同値であることを示せ.

(P) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u(k)$ は収束する　　(Q) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n} u(x)\,\mathbf{d}x$ は収束する

[証明略]