【Example 2.1】

x の関数

$$I(x)=\int_1^{\mathbf{e}}\left|\log t-x\right|\,\mathbf{d}t$$

の $0<x<1$ における最小値を求めよ．

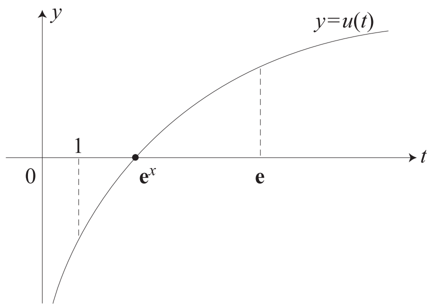
Point

被積分関数に絶対値を含む積分は絶対値を外して積分．或いは，以下の**定理**を利用する．

【解説】

$u(t)=\log t-x$ と置けば，

$$u(t)=0 \iff t=\mathbf{e}^x$$



即ち，$y=u(t)$ のグラフは**上図**であり，

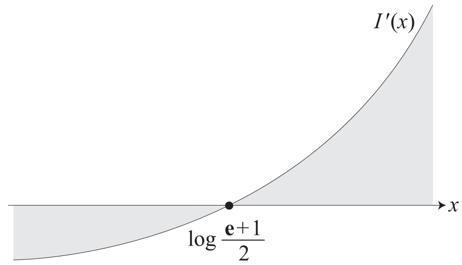
$$I(x)=-\int_1^{\mathbf{e}^x}u(t)\,\mathbf{d}t+\int_{\mathbf{e}^x}^{\mathbf{e}}u(t)\,\mathbf{d}t$$

$$=U(\mathbf{e})-2U(\mathbf{e}^x)+U(1)=2\mathbf{e}^x-(\mathbf{e}+1)x-1$$

ここで，$U(t)=t\log t-t-xt$ と表した．

これより，$I(x)$ の極値を求めると，

$$I'(x)=2\mathbf{e}^x-(\mathbf{e}+1)=0 \iff x=\log\frac{\mathbf{e}+1}{2}$$



従って，$I'(x)$ のグラフは**下図**であり，

$I(x)$ は $x=\log\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ で極小かつ**最小**．

$$\therefore\ \min I=(\mathbf{e}+1)-(\mathbf{e}+1)\log\frac{\mathbf{e}+1}{2}-1=(\mathbf{e}+1)\log\frac{2\mathbf{e}}{\mathbf{e}+1}-1$$

[Note]　関数 $I(x)$ の最小値を与える x の値は次の**定理**により即座に求められる．
ただし，最小値については $I(x)$ を定義する積分を実行しなければならない．

Theorem

$a\leq x\leq b$ で定義された x の関数

$$I(x)=\int_a^b\left|u(t)-u(x)\right|\,\mathbf{d}t$$

は，$x=\dfrac{a+b}{2}$ で最小値をとる．

ここで，u は区間 $[a,\,b]$ において単調増加 (単調減少) な関数とする．

例題の $I(x)$ に対して，**定理**を適用してみる．

$$I(x)=\int_1^{\mathbf{e}}\left|\log t-x\right|\,\mathbf{d}t=\int_1^{\mathbf{e}}\left|\log t-\log s\right|\,\mathbf{d}t$$

ここで，$x=\log s$ と変換した．($\because$ $\log s$ の単調性)

定理により，$I(x)$ は $s=\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ で最小となるので，

$$s=\frac{\mathbf{e}+1}{2}\iff x=\log\frac{\mathbf{e}+1}{2}$$

即ち，$I(x)$ は $x=\log\dfrac{\mathbf{e}+1}{2}$ において最小値をとることが確認された．

更に，より一般的な関数に適用できる次の**拡張定理**も成り立つ．

Theorem

$a\leq x\leq b$ で定義された x の関数

$$I(x)=\int_a^b v(t)\left|u(t)-u(x)\right|\,\mathbf{d}t$$

を最小化する $x=m$ は次の式を満たす．

$$\int_a^m v(x)\,\mathbf{d}x=\int_m^b v(x)\,\mathbf{d}x\ \land\ a<m<b$$

ここで，u は $[a,\,b]$ において単調であり，$v>0$ を満たす関数とする．

【Review 2.1.1】

x の関数

$$I(x)=\int_0^1\left|t\,\mathbf{e}^t-x\right|\,\mathbf{d}t$$

を最小にする x の値とその最小値を求めよ．

[答] 最小値 $\sqrt{\mathbf{e}}-1\ \left(x=\dfrac{\sqrt{\mathbf{e}}}{2}\right)$

【Review 2.1.2】 92 東工大

x の関数

$$I(x)=\int_0^1\frac{|t-x|}{t+1}\,\mathbf{d}t$$

の最小値を与える x の値を求めよ．

[答] $x=\sqrt{2}-1$

【Example 2.2.1】　– Cycloid –

半径 1 の円 $\mathfrak{D}$ が原点 O で x 軸に接している.

$\mathfrak{D}$ を右方向に滑らずに回転させるとき，最初 O にあった $\mathfrak{D}$ 上の点 P が描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする.

(1) $\mathfrak{D}$ の回転角を t $(0 \leq t < 2\pi)$ とするとき，P の位置 (x, y) を t の式で表せ.

(2) $\mathfrak{C}$ と x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ.

Point

媒介変数表示された曲線と x 軸の囲む領域の面積は，

$$\int_{x_1}^{x_2} |y|\,\mathbf{d}x = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\,\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t$$

ここで，$x_1 < x_2$ であり，$x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ とする.

【解答】

(1) **下図**により，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

ここで，O′ は円 $\mathfrak{D}$ の中心である.

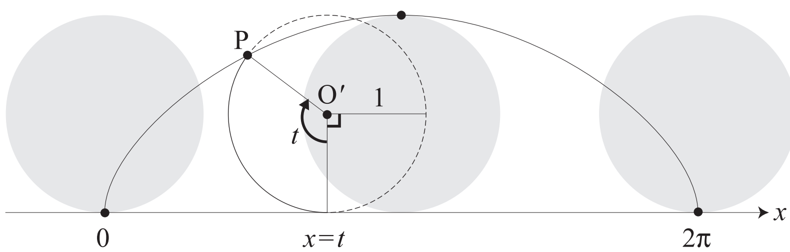
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2 - t) \\ \sin(-\pi/2 - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

従って，

$$\begin{cases} x = x(t) = t - \sin t \\ y = y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

(2) 題意の領域の面積は，

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=2\pi} |y|\,\mathbf{d}x &= \int_{t=0}^{t=2\pi} y(t)\,\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathbf{d}t = 4 \times \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\,\mathbf{d}t = 16 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \tau\,\mathbf{d}\tau \quad \left(\because\ \tau = \frac{t}{2}\right) \\ &= 16 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi \end{aligned}$$



[Note]

(2) の面積計算の最終行では,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathbf{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

なる積分漸化式を用いた．即ち,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathbf{d}x$$

に対して部分積分法を用いると,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot\sin x\,\mathbf{d}x = \Big[-\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,\mathbf{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,\mathbf{d}x = (n-1)\big(I_{n-2}-I_n\big) \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

(2.1.2) を I_n について解き,

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

(2.1.3) において $n=4$ として,

$$I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathbf{d}x = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

一般に,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{even}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{2}{3}\times 1 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

となり，積分計算が飛躍的に効率化される．

また，この漸化式は $\cos^n x$ の積分に対しても成り立つ．即ち,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

に対して,

$$J_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{even}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{2}{3}\times 1 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.1.7)$$

(2.1.5), (2.1.7) は高次の三角関数の積分に対して非常に強力であるが，積分区間が $[0,\ \pi/2]$ に限定される．

一般の積分区間に対しては，次の漸化式を用いる．

$$\int_a^b \sin^n x\,\mathbf{d}x = \Big[-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x\Big]_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \sin^{n-2}x\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

【Review 2.2.1】 – Epicycloid –

原点を中心とする半径 4 の円を $\mathfrak{C}_1$，点 $(5,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_2$ とする．$\mathfrak{C}_2$ が $\mathfrak{C}_1$ の周上を反時計周りに滑らずに転がり元の位置に戻るとき，最初に $(4,\ 0)$ にあった $\mathfrak{C}_2$ 上の点 P の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする．このとき，$\mathfrak{C}$ が囲む図形の面積を求めよ．

[答] 30π

【Review 2.2.2】 – Cardioid –

原点を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_1$，点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}_2$ とする．$\mathfrak{C}_2$ が $\mathfrak{C}_1$ の周上を反時計周りに滑らずに転がり元の位置に戻るとき，最初に $(1,\ 0)$ にあった $\mathfrak{C}_2$ 上の点 P の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする．このとき，$\mathfrak{C}$ が囲む図形の面積を求めよ．

[答] 6π

【Review 2.2.3】 – Trochoid –

両端を P, Q とする長さ $a>1$ の棒をその一端 P が半径 1 の円板の中心に一致するように円板に貼り付ける．この棒の付いた円板を両端 P, Q がそれぞれ点 $(0,\ 1)$, $(0,\ 1-a)$ に一致するように xy 平面上に置き，その円板の周が x 軸上を滑ることなく正の向きに円板を転がす．Q の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 円板が角 θ だけ回転したときの Q の座標は，

$$x=\theta-a\sin\theta,\quad y=1-a\cos\theta$$

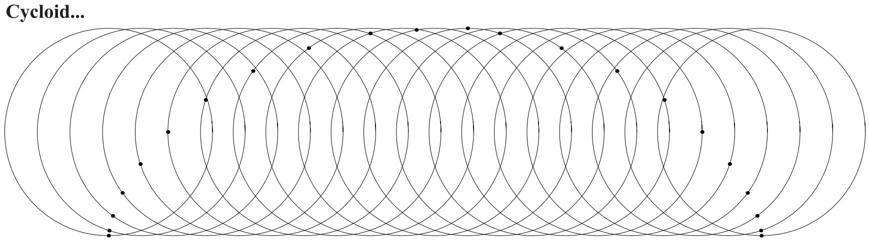
と表せることを示せ．

(2) 円板が一定の速さで転がるとき，Q の速さが最大となる θ の値を求めよ．

(3) $a=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\mathfrak{C}$ と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

[答] (2) $\theta=\pi$ (3) $\dfrac{\pi^3}{108}+\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{72}-\dfrac{\pi}{6}$

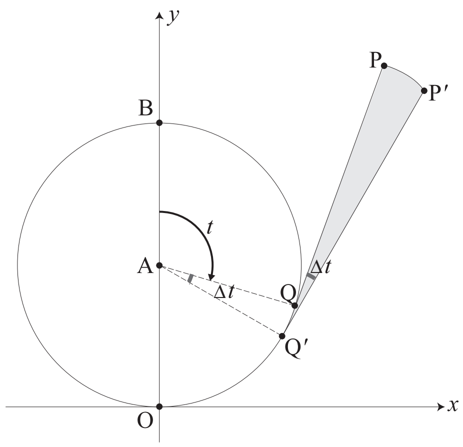
Cycloid...



【Example 2.2.2】 – Involute –

原点を O とし，平面上に点 A(0, 1), B(0, 2) をとる．OB を直径とする半径 1 の円の $x \geq 0$ の部分を Γ とする．長さ π の糸が一端を O に固定して Γ に巻き付けてある．この糸の他の端点 P を引き，それが x 軸に達するまで緩むことなく解いていく．糸と半円の接点を Q とし，$\angle\mathrm{BAQ} = t$ とするとき，P が描く曲線 $\mathfrak{C}$ と x 軸および Γ で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

【解説】



変数 t が $\Delta t > 0$ 増加したときの図形 $\mathrm{QQ'P'P}$ を考える．
円弧 $\mathrm{QQ'}$ は，Δt が十分小ならば Q における接線の一部と見なしてよく，3 点 Q′, Q, P は同一直線 (Q における接線) 上に乗る．この線分 Q′P の長さは $t + \Delta t$ であるから，図形 $\mathrm{Q'P'P}$ を中心角 Δt の扇形と見なして，その面積 ΔS は,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{2}\left(t+\Delta t\right)^2 \Delta t \\ &= \frac{1}{2}\left(t^2\Delta t + 2t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3\right) \cong \frac{1}{2}t^2\Delta t \qquad \cdots\cdots(2.2.1)\end{aligned}$$

これをを図形 $\mathrm{QQ'P'P}$ の面積の一次近似と考えてよいので,

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{d}t = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

[Note]

「一次近似と考えてよい」とは，Δt の二次以上の項を無視することである．即ち，
$t \to t + \Delta t$ と変化したときに線分 PQ が通過する領域の面積を ΔS で表すと,

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}\left(t+\Delta t\right)^2 \Delta t \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

(2.2.3) の両辺を $\Delta t > 0$ で割り，$\Delta t \to 0$ とすると,

$$\frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{2}\left(t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2\right) = \frac{1}{2}t^2 \iff S = \int_0^t \frac{1}{2}t^2\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

この方法に依らずに実直に計算する次の解法と比較してほしい．

【別解】

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/2 - t) \\ \sin(\pi/2 - t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = -t \times \begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{d}(\sin t)}{\mathbf{d}t} \\ \dfrac{\mathbf{d}(\cos t)}{\mathbf{d}t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\cos t \\ t\sin t\end{pmatrix}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は点 Q における円の接線方向のベクトルで，その長さは t である．

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix}\sin t - t\cos t \\ 1 + \cos t + t\sin t\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

曲線 $\mathfrak{C}$ は x 軸の上側にあるので，$\mathfrak{C}$ と x 軸の囲む領域の面積は,

$$\int_{x=0}^{x=\pi} y\,\mathbf{d}x = \int_{t=0}^{t=\pi} y(t)\,x'(t)\,\mathbf{d}t = \int_0^{\pi}(1+\cos t + t\sin t)(t\sin t)\,\mathbf{d}t = \cdots\cdots = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

(2.2.5) から半円の面積 $\pi/2$ を除けば，(2.2.2) の結果を得る．

【Review 2.2.4】 – 等角螺旋 (Spiral) –

曲線

$$\begin{cases} x = \mathbf{e}^{-t}\cos t \\ y = \mathbf{e}^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸の囲む領域の面積を求めよ.

[答] $\dfrac{1-\mathbf{e}^{-2\pi}}{4}$

【Review 2.2.5】 – Lemniscate –

極方程式

$$r(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

で表される曲線によって囲まれる領域の面積を求めよ.

[答] 2

【Example 2.3】

(1) 正整数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x$$

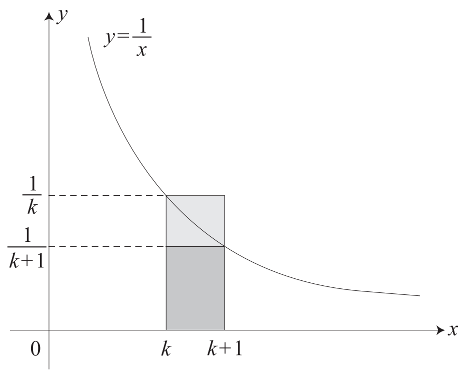
(2) $5<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<9$ を満たす正整数 n を 1 つ求めよ.

Point

(積分を含む) 不等式の証明問題は面積による評価

【解説】

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の区間 $[k,\,k+1]$ における小長方形の面積，
曲線と x 軸の囲む部分の面積，大長方形の面積を比較して，



$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x<\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) において，$k=1,2,\cdots,n-1$ について和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \iff \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x$$

$$\iff 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

同様に，$k=1,2,3,\cdots,n$ について和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.2), (3.3) により，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(2) (3.4) における積分を実行して，

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

ここで，$2<\mathbf{e}<3$ であるから，

$$\begin{cases} 5=\log\mathbf{e}^5<\log 3^5<\log(n+1) \\ 1+\log n<1+\log 2^8<1+\log\mathbf{e}^8=9 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) により，$3^5-1<n<2^8$ を満たす n を 1 つ決めればよいので，

$$n=243,\ 244,\ 245,\ \cdots,\ 255 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

【Review 2.3.1】 97 京大

(1) $0 \leq \alpha < \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を示せ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, \mathbf{d} + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x \, \mathbf{d}x > (\beta - \alpha)\big(\sin \alpha + \sin(\pi - \beta)\big)$$

(2) 次の不等式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{7} \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$$

[証明略]

【Review 2.3.2】

$u(x) \geq 0$ $(x > 0)$ を満たす単調減少関数 $u(x)$ について，次の命題 (P), (Q) は同値であることを示せ.

(P) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u(k)$ は収束する　　(Q) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} u(x) \, \mathbf{d}x$ は収束する

[証明略]