【Example 3.1.1】

曲線 $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

Point

曲線 $y = u(x)$ $(a \le x \le b)$ を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積は,

$$2\pi \int_a^b x\,|u(x)|\,\mathbf{d}x$$

【解説】

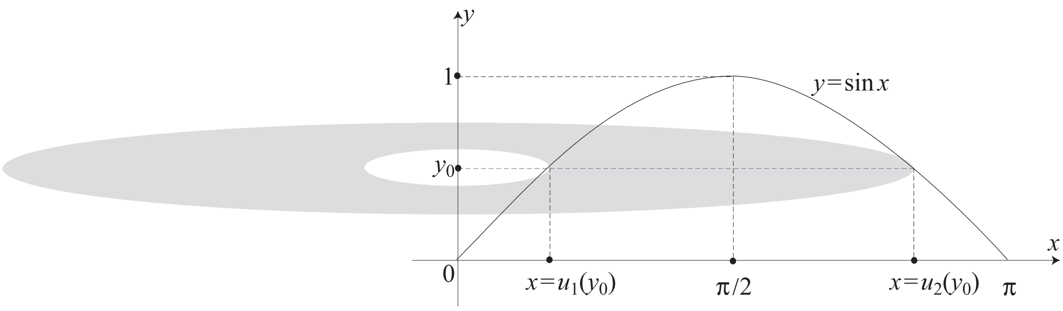
曲線 $y = \sin x$ に対して,

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ に対応する部分の関数を } x = u_1(y),$$
$$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \text{ に対応する部分の関数を } x = u_2(y)$$

で表すとき, 求める体積は,
$u_2(y)$ を y 軸の周りに回転してできる立体の体積から,
$u_1(y)$ を y 軸の周りに回転してできる立体の体積を除いて得られるので,

$$\pi \int_{y=0}^{y=1} \big(u_2(y)\big)^2\,\mathbf{d}y - \pi \int_{y=0}^{y=1} \big(u_1(y)\big)^2\,\mathbf{d}y = \pi \int_{x=\pi}^{x=\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\,\mathbf{d}x - \pi \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\,\mathbf{d}x = \pi \int_{\pi}^{0} x^2 \cos x\,\mathbf{d}x = 2\pi^2$$

[Note]　y の関数 u_1, u_2 は**逆三角関数**であるから, その原始関数は算出できない.
即ち, 変数 y の積分を変数 x の積分に**置換**して計算している点に注目してほしい.



Comment

一般に, 増減を繰り返す曲線 $y = u(x)$ を y 軸の周りに回転して得られる立体は, 回転軸に垂直な平面で切った切口が**多重円環領域**となり, 切口の面積計算が複雑になる (**次頁上図**). 更に, その逆関数 $x = u^{-1}(y)$ を求める作業は必ずしも容易でなく, 具体的に求まらない場合も多い. この状況に威力を発揮するのが Cylinder **型分割**と呼ばれる計算法で, $y = u(x)$ が $a \le x \le b$ の範囲で何度増減を繰り返しても

$$2\pi \int_a^b x\,|u(x)|\,\mathbf{d}x$$

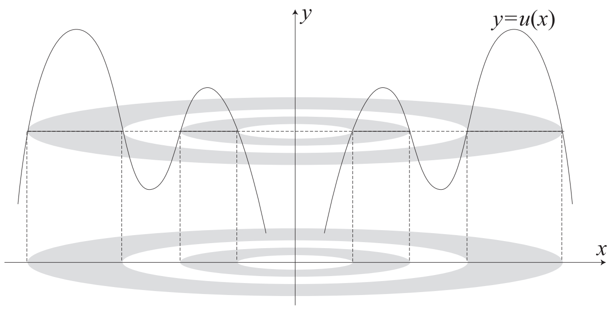
なる積分単体で体積を算出する. 次頁にその考え方を示す.

– Cylinder 型分割 –

$a \leq x \leq b$ で定義された曲線 $y = u(x)$ の区間 $[a,\ x]$ の部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V(a,\ x)$ で表すとき，区間 $[x,\ x+\Delta x]$ に対応する立体の体積 $V(a,\ x+\Delta x) - V(a,\ x) = \Delta V$ は，

$$m\left(\pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2\right) \leq \Delta V \leq M\left(\pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2\right) \quad \cdots\cdots(1.1)$$

で評価できる．



ここで，M は $[x,\ x+\Delta x]$ における $u(x)$ の最大値，
m は $[x,\ x+\Delta x]$ における $u(x)$ の最小値を表す．

(1.1) の各辺を $\Delta x > 0$ で割り，

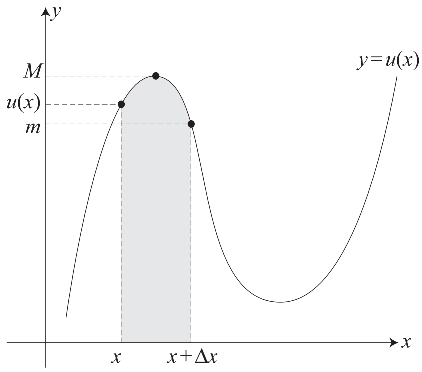
$$m(2\pi x + \pi\Delta x) \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq M(2\pi x + \pi\Delta x) \quad \cdots\cdots(1.2)$$

ここで，$\Delta x \to +0$ とすると，

$$m \to u(x) \ \wedge \ M \to u(x) \quad \cdots\cdots(1.3)$$

従って，**ハサミウチの原理**により，

$$\frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi x u(x) \quad \cdots\cdots(1.4)$$



(1.4) を区間 $[a,\ x]$ で積分して，

$$V(a,\ x) = 2\pi\int_a^x x u(x)\ \mathbf{d}x \quad \cdots\cdots(1.5)$$

即ち，区間 $[a,\ b]$ における体積 V は，

$$V = 2\pi\int_a^b x u(x)\ \mathbf{d}x \quad \cdots\cdots(1.6)$$

以上の議論において，$u(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ を仮定した．
(1.6) を用いて例題の体積を計算すると，

$$2\pi\int_0^{\pi} x \sin x\ \mathbf{d}x = 2\pi\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + 2\pi\int_0^{\pi}\cos x\ \mathbf{d}x = 2\pi^2 \quad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.7) を前頁の積分計算と比較すれば，公式の効用は明らかである．

【Example 3.1.2】

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれる領域 $\mathfrak{D}$ を $y = x$ の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

Point

曲線 $y = u(x)$ と直線 $y = kx$ の囲む領域を $y = kx$ の周りに回転して得られる立体の体積は,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}\int_a^b \{u(x) - kx\}^2\,\mathbf{d}x$$

ここで, $y = u(x)$, $y = kx$ の交点の座標は $x = a,\ b\ (a < b)$ である.

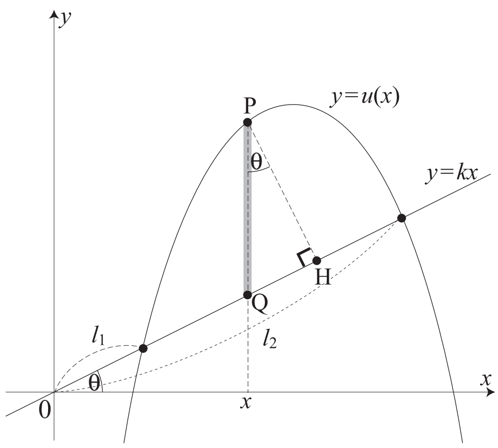
【解説】

題意の体積は直線 $y = kx$ を積分軸にとり,

$$\pi\int_{\mathrm{OH}=l_1}^{\mathrm{OH}=l_2} \mathrm{PH}^2\,\mathbf{d}(\mathrm{OH}) = \pi\int_{x=x_1}^{x=x_2} \mathrm{PH}^2\,\frac{\mathbf{d}(\mathrm{OH})}{\mathbf{d}x}\,\mathbf{d}x \quad \cdots\cdots(1.10)$$

ここで,

$$\begin{cases} \mathrm{PH} = \mathrm{PQ} \times \cos\theta = \big(u(x) - kx\big)\cos\theta & \cdots\cdots(1.11) \\ \mathrm{OH} = \mathrm{OQ} + \mathrm{QH} = \dfrac{x}{\cos\theta} + \big(u(x) - kx\big)\sin\theta & \cdots\cdots(1.12) \end{cases}$$



(1.12) を x で微分して,

$$\frac{\mathbf{d}(\mathrm{OH})}{\mathbf{d}x} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\big(u(x) - kx\big)\sin\theta \quad \cdots\cdots(1.13)$$

(1.11), (1.13) を (1.10) に代入して,

$$\begin{aligned} &\pi\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\big(u(x) - kx\big)\sin\theta\right)\mathbf{d}x \\ &= \pi\cos\theta\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\,\mathbf{d}x + \pi\cos^2\theta\sin\theta\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\big(u(x) - kx\big)\,\mathbf{d}x \\ &= \pi\cos\theta\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\,\mathbf{d}x + \pi\cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{1}{3}\big(u(x) - kx\big)^3\right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \pi\cos\theta\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\,\mathbf{d}x \quad \big(\because\ u(x_1) = kx_1,\ u(x_2) = kx_2\big) \quad \cdots\cdots(1.15) \end{aligned}$$

ここで,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad \cdots\cdots(1.16)$$

を (1.15) に代入して,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}\int_{x_1}^{x_2}\big(u(x) - kx\big)^2\,\mathbf{d}x \quad \cdots\cdots(1.17)$$

従って, $u(x) = x^2$, $k = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ を (1.17) に代入して,

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (x^2 - x)^2\,\mathbf{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^2(x-1)^2\,\mathbf{d}x = \frac{\pi}{30\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots(1.18)$$

Comment

例題の計算法を前例題の計算法と区別して Cone **型分割**ということにする．即ち，微小な厚み Δx の線分 PQ が直線 $y=kx$ を軸として回転してできる立体は Δx の厚みの**円錐曲面**で，x の変化とともにできる無数の円錐曲面の重ね合せが題意の回転体を近似すると考えられるからである．前例題の Cylinder **型分割**と合わせて，回転体の体積計算には次の三種類の計算法があるので整理しておく．

(A) Disk **型分割**; 最も基本的・一般的な計算法である．

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\{u(x)\}^2\,\mathbf{d}x$$

(B) Cylinder **型分割**; 増減が複雑な曲線に対して有効で，陽関数，陰関数，媒介変数関数の何れにも適用できる．

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\,|u(x)|\,\mathbf{d}x$$

(C) Cone **型分割**; 回転軸が座標軸に平行でない場合に有効である．
回転軸 $y=kx$ と曲線 $y=u(x)$ が閉領域を作る場合の単純な公式のみ示す．

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}\int_{x_1}^{x_2}\{u(x)-kx\}^2\,\mathbf{d}x$$

これらの公式を天下り的に記憶するのではなく，三種類の計算原理の違いを理解した上で，それぞれの計算法がどのような状況下で有効かを理解して貰いたい．以下に復習用の問題を与えるが，[3.1.1], [3.1.2] は (A), (B) の二通りの方法で，[3.1.3], [3.1.4] は (C) の方法で解いてみよう．

【Review 3.1.1】　97 東大

$0<a<\dfrac{1}{4}$ とするとき，不等式

$$y^2\leq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ．

[答] $\left(\dfrac{1}{4}-a\right)\pi^2$

【Review 3.1.2】

$0<r<a$ とするとき，

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

によって囲まれる領域を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ．

[答] $2\pi^2r^2a$

【Review 3.1.3】

曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ で囲まれる領域を直線 $y=x$ の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ．

[答] $\dfrac{8\sqrt{2}}{105}\pi$

【Review 3.1.4】

曲線 $y=\sin x$ と直線 $y=x$, $y=-x+\pi$ によって囲まれる領域を $y=x$ の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ．

[答] $\dfrac{\pi^2(\pi^2-9)}{6\sqrt{2}}$

【Example 3.2】 92 日本女子大

空間内の 2 点 $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\cos(t+\alpha),\ \sin(t+\alpha),\ 1)$ の作る線分 PQ を考える．
t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くとき，線分 PQ の描く曲面と平面 $z=0$, $z=1$ の囲む立体の体積を求めよ．
また，α が $0 \leq \alpha \leq \pi$ の範囲を動くとき，この立体の体積の最大値と最小値を求めよ．

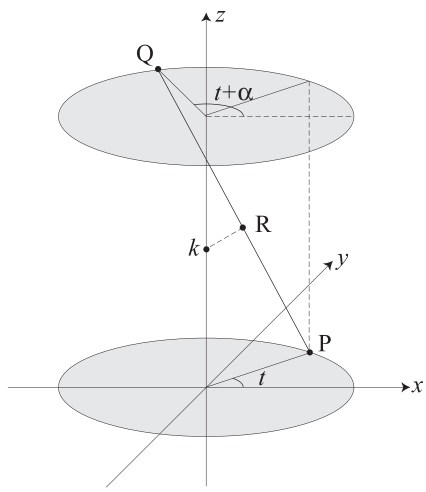
Point

平面 $x=t$ $(a \leq t \leq b)$ による切口の面積が $S(t)$ であるような立体の体積は，$\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathbf{d}t$

【解説】

線分 PQ と平面 $z=k$ $(0 \leq k \leq 1)$ との交点 R は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} (1-k)\cos t + k\cos(t+\alpha) \\ (1-k)\sin t + k\sin(t+\alpha) \\ k \end{pmatrix}$$



この点 R を z 軸の周りに回転してできる円の面積は,
回転の中心 $(0,\ 0,\ k)$ と点 R との距離を半径として,

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi\Big\{\big((1-k)\cos t + k\cos(t+\alpha)\big)^2 + \big((1-k)\sin t + k\sin(t+\alpha)\big)^2\Big\} \\ &= \pi\Big\{(1-k)^2 + k^2 + 2k(1-k)\big(\cos(t+\alpha)\cos t + \sin(t+\alpha)\sin t\big)\Big\} \\ &= \pi\Big\{1 - 2k + 2k^2 + 2k(1-k)\cos\alpha\Big\} \quad (\because\ \textbf{加法定理}) \\ &= \pi\Big\{2(1-\cos\alpha)k^2 - 2(1-\cos\alpha)k + 1\Big\} \end{aligned}$$

このとき，回転体の体積を $V(\alpha)$ で表せば,

$$V(\alpha) = \int_{k=0}^{k=1} S(k)\,\mathbf{d}k = \pi\int_0^1 \Big\{2(1-\cos\alpha)k^2 - 2(1-\cos\alpha)k + 1\Big\}\,\mathbf{d}k$$
$$= \pi\left[\frac{2}{3}(1-\cos\alpha)k^3 - (1-\cos\alpha)k^2 + k\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}(2+\cos\alpha)$$

この体積 $V(\alpha)$ に対して,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \text{ のとき, 円柱となり体積の最大値は } \pi \\ \alpha = \pi \text{のとき, 円錐となり体積の最小値は } \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Point

線分 PQ を「回転する前に」平面 $z=k$ で切り, その交点 R の描く円の面積を求める

[Note] $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi$ のとき，立体の側面は**回転双曲面**と呼ばれる曲面で，z 軸を含む平面 (例えば，xz 平面) 内の双曲線を z 軸の周りに回転してできる曲面と同じ曲面になる．この事実を [Review 3.2.1] で確認せよ．

【Review 3.2.1】

xz 平面上の双曲線

$$x^2-2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

を z 軸の周りに回転して得られる曲面と平面 $z=0,\ z=1$ によって囲まれる立体の体積を求めよ.

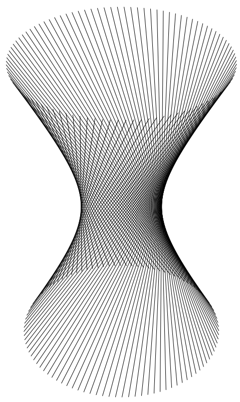
[答] $\dfrac{2\pi}{3}$

【Review 3.2.2】　96 東大

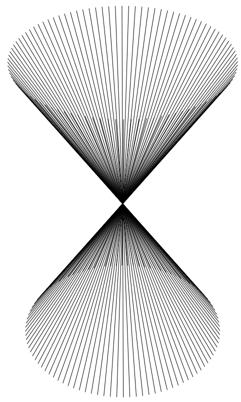
xyz 空間において，$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{Q}(a,\ a+1,\ 0)$ とする.
線分 PQ を z 軸の周りに回転して得られる曲面と平面 $z=1$ および $z=0$ が囲む体積を $V(a)$ とする.
a が実数全体を動くとき，$V(a)$ の最小値と最小値を与える a の値を求めよ.

[答] $\dfrac{7\pi}{24}\ \left(a=-\dfrac{3}{4}\right)$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$



$\alpha=\pi$



【Example 3.3】 84 東大

空間内の 3 点

$$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{Q}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

を頂点とする三角形 T を x 軸の周りに回転するとき，T が通過する領域の体積を求めよ.

【解説】

正三角形 PQR を平面

$$x=t\ \left(\frac{1}{4}\leq t\leq 1\right)$$

で切った切口の線分 $\mathrm{P'Q'}$ を点 $\mathrm{H}(t,\ 0,\ 0)$ の周りに回転して得られる円環領域が,
三角形 PQR を回転して得られる立体の平面 $x=t$ による切口の図形である. **(右図)**
この円環領域の面積 $S(t)$ は，三角形 PQR の平面 $y=0$ に関する対称性から,
$\mathrm{P'Q'}$ の中点を $\mathrm{M'}$ として,

$$S(t)=\pi\left\{(\mathrm{HP'})^2-(\mathrm{HM'})^2\right\}=\pi\left(\mathrm{M'P'}\right)^2\quad (\because \textbf{三平方の定理})$$

で表されるので，三角形 PQR と三角形 $\mathrm{RP'Q'}$ の相似比に注目して,

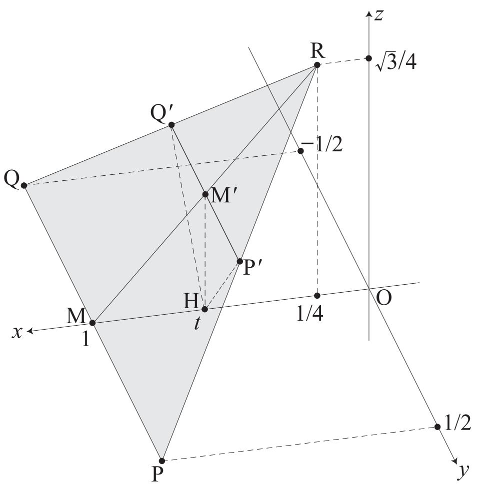
$$\mathrm{RM}:\mathrm{RM'}=\frac{3}{4}:\left(t-\frac{1}{4}\right)=3:(4t-1)\iff \mathrm{M'P'}=\frac{4t-1}{3}\times\mathrm{MP}=\frac{4t-1}{6}$$

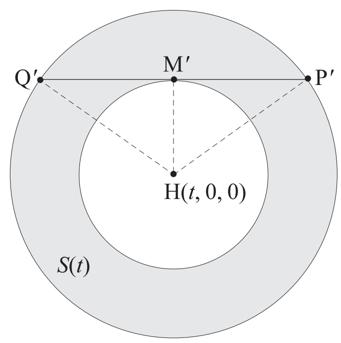
即ち,

$$S(t)=\frac{\pi}{36}(4t-1)^2\quad \left(\frac{1}{4}\leq t\leq 1\right)$$

従って，求める体積は,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}S(t)\,\mathbf{d}t=\frac{\pi}{36}\int_{\frac{1}{4}}^{1}(4t-1)^2\,\mathbf{d}t=\frac{\pi}{36}\left[\frac{1}{12}(4t-1)^3\right]_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{\pi}{16}$$





【Review 3.3.1】

１辺の長さ１の正四面体をねじれの位置にある対辺の中点を通る直線を軸として回転させるとき,

(1) この正四面体の表面および内部の領域が通過する空間領域の体積を求めよ.

(2) この正四面体の表面が通過する空間領域の体積を求めよ.

[答] (1) $\dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{7\pi}{48\sqrt{2}}$

【Review 3.3.2】 93 東工大

１辺の長さ１の立方体を立方体の中心を通る対角線の１つを軸として回転するとき,

立方体内部の点を含む立方体が通過する空間領域の体積を求めよ.

[答] $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$