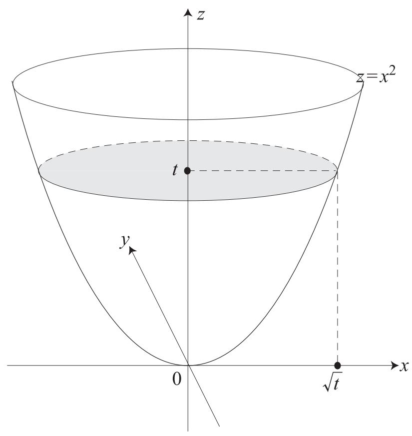
【Example 4.1.1】 – 回転放物面 –

xyz 空間において，xz 平面上の曲線 $z = x^2$, $y = 0$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面を $\mathfrak{S}$ とする．
このとき，曲面 $\mathfrak{S}$ と平面 $\mathfrak{P} : z = 2x + 3$ によって囲まれる立体の体積を求めよ．

Point

非回転体の体積 $\Longrightarrow$ 座標軸に垂直な平面による切口の面積を調べる

【解説】



● 曲面 $\mathfrak{S}$ の方程式;

平面 $z = t \geq 0$ による $\mathfrak{S}$ の切口の円 (**上図**) の半径は $\sqrt{t}$.
従って，この平面内の円は連立方程式

$$x^2 + y^2 = t \ (\textbf{円柱面}) \ \land \ z = t \ (\textbf{平面}) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

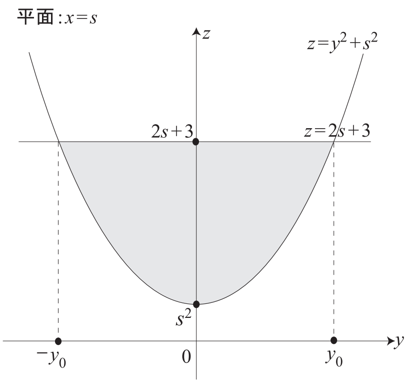
で表され，(1.1) から t を消去した，

$$z = x^2 + y^2 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が $\mathfrak{S}$ 上の任意の点 (x, y, z) の満たす関係式であり，$\mathfrak{S}$ の方程式である．

● $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$ の囲む空間領域の平面 $x = s$ $(-1 \leq s \leq 3)$ による切口の面積;

$z = 2x + 3$, $x = s$ の交線は，$x = s$ 上の直線 $z = 2s + 3$ であり，
$z = x^2 + y^2$, $x = s$ の交線は，$x = s$ 上の放物線 $z = y^2 + s^2$ である．
そこで，平面 $x = s$ 上の 2 図形の囲む領域 (**下図**) の面積を求める．



2 図形の交点の y 座標は，

$$\begin{cases} z = y^2 + s^2 \\ z = 2s + 3 \end{cases} \iff y = \pm\sqrt{-s^2 + 2s + 3} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

従って，**下図**の領域の面積は次の積分で定義される．

$$\begin{aligned}\int_{-y_0}^{y_0} \left({y_0}^2 - y^2\right) \mathbf{d}y &= -\int_{-y_0}^{y_0} (y + y_0)(y - y_0) \, \mathbf{d}y \\ &= \frac{4}{3}{y_0}^3 = \frac{4}{3}\left(-s^2 + 2s + 3\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.4)\end{aligned}$$

ここで，$y_0 = \sqrt{-s^2 + 2s + 3}$ と略記した．

● 題意の立体の体積;

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\int_{-1}^{3} \left(-s^2 + 2s + 3\right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{d}s &= \frac{4}{3}\int_{-1}^{3} \left(4 - (s-1)^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{d}s \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^{\frac{3}{2}} \left(1 - \sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\cos\theta \, \mathbf{d}\theta = \frac{128}{3} \times \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, \mathbf{d}\theta \\ &= \frac{128}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 8\pi \qquad \cdots\cdots(1.5)\end{aligned}$$

ARISTOS

Comment

- 曲面 $\mathfrak{S}$ と平面 $x = s$ との切口の放物線の方程式を求めるために曲面 (**回転放物面**) の方程式を導出した.

曲面 $\mathfrak{S}$ 上の任意の点 (x, y, z) が満たす x, y, z の関係式 (1.2) が求める回転放物面の方程式である.

- 平面 $x = s$ 上における直線と放物線の囲む領域の面積を求める際に，次の積分公式を用いた.

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

- 体積計算における被積分関数 $\left(-s^2+2s+3\right)^{\frac{3}{2}}$ に対して,

s について平方完成し, $s-1 = 2\sin\theta$ と変数変換する

という流れは積分計算の典型的なパターンであり技巧的な計算ではない.
更に，(1.5) の最下行の計算では，次の積分漸化式を用いたことに注意せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathbf{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,\mathbf{d}x$$

Comment

解説では，立体の切断方向を **座標軸に垂直な平面** にとったが，立体を構成する平面 $\mathfrak{P}$ に平行にとっても良い.
その方法については次の例題で詳しく述べる．更に，Cavalieri **の原理**を用いた簡明な計算法もあるので以下を参照.

Cavalieri の原理

空間閉領域 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ に対して，その体積をそれぞれ V, V' で表すとき,

$$S = S' \implies V = V'$$

ここで，S, S' は任意の平面で $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ を同時に切った切口の面積を表す.

Cavalieri **の原理**を用いれば，曲面 $z = x^2+y^2$ と平面 $z = 2x+3$ の囲む領域 $\mathfrak{D}$ の体積 V は,
曲面 $z = x^2-2x+y^2-3$ と xy 平面 $z = 0$ の囲む領域 $\mathfrak{D}'$ の体積 V' に等しく,
平面 $z = t\ (-4 \leq t \leq 0)$ による $\mathfrak{D}'$ の切口は,

$$z = x^2-2x+y^2-3 \ \wedge\ z = t \iff (x-1)^2+y^2 = 4+t\ (\textbf{円柱面}) \ \wedge\ z = t$$

であるから，切口の円の面積は $(4+t)\pi$ である.

$$\therefore\ V' = \int_{-4}^{0} (4+t)\pi\,\mathbf{d}t = 8\pi$$

【Review 4.1.1】 – 回転放物面 –

座標空間において，yz 平面上の放物線 $z = y^2$, $x = 0$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面と平面 $z = y$ で囲まれる領域 $\mathfrak{D}$ の体積を求めよ.

[答] $\dfrac{\pi}{32}$

ARISTOS

【Extra 4.1.2】　– 円錐曲面 –

xyz 空間において，3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

の作る三角形 ABC を z 軸の周りに回転してできる立体 (**円錐**) を考える．
この立体の側面 (**円錐曲面**) の方程式を求め，円錐の体積を求めよ．

Point

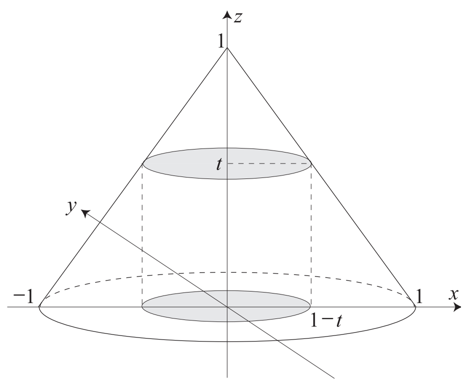
座標軸に垂直でない平面による切口の図形の面積を求めるには，
断面の図形を座標平面に**正射影した図形の面積**から間接的に求める．

【解説】

● 円錐曲面の方程式を求める;

題意の円錐の平面 $z=t$ $(0\leq t\leq 1)$ による切口の円の半径 r は，
円錐の母線，即ち，xz 平面内の直線 $z=1-x$ と平面 $z=t$ との
交点の x 座標を調べることにより，

$$r=1-t \qquad \cdots\cdots(1.11)$$



従って，切口の円周上の点 $(x,\ y,\ z)$ は連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=(1-t)^2 & \cdots\cdots(1.12) \\ z=t & \cdots\cdots(1.13) \end{cases}$$

を満たすので，(1.12), (1.13) から t を消去した (1.14) が曲面上
の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ の満たす関係式，即ち，曲面の方程式である．

$$x^2+y^2=(1-z)^2 \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

● 円錐の体積を求める;

平面 $z=t$ $(0\leq t\leq 1)$ による円錐曲面の切口の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi r^2=\pi(1-t)^2 \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

従って，求める体積は，

$$\int_0^1 \pi(1-t)^2\,\mathbf{d}t=\frac{\pi}{3} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

[Note]　勿論，直円錐の体積は初等幾何的に求められるが，円錐曲面の方程式を導く過程に注目して貰いたい．

【Review 4.1.2】

座標空間において，方程式

$$x^2+y^2=(1-z)^2,\ \ z\geq 0$$

の表す立体を平面 $z=x$ によって 2 つの部分に切り分けたとき，
点 (1, 0, 0) を含む側の部分の体積を求めよ．

[答] $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{9}$

ARISTOS

【Example 4.2】 82 東大

xyz 空間において，連立不等式

$$0 \leq z \leq 1 + x + y - 3(x-y)y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq y+1$$

のすべてを満たす点全体が作る領域の体積を求めよ．

Point

連立不等式の表す空間領域の体積は，(**最も複雑な変数**) $= t$ なる平面による切口の面積 $S(t)$を積分する

【解説】

平面 $y = t$ $(0 \leq t \leq 1)$ による題意の空間領域の切口は，

$$0 \leq z \leq (1-3t)x + 3t^2 + t + 1 \ \wedge \ t \leq x \leq t+1$$

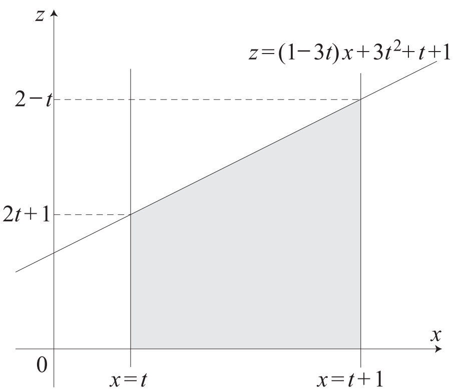
なる不等式で表される．

平面 $y = t$ 上の台形領域 (**右図**) の面積は，

$$\frac{1}{2}\big((2t+1)+(2-t)\big)\times\big((t+1)-t\big) = \frac{1}{2}(t+3)$$

従って，求める体積は，

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(t+3)\,\mathbf{d}t = \left[\frac{1}{4}(t+3)^2\right]_0^1 = \frac{7}{4}$$



【Review 4.2.1】 90 名古屋市大

xyz 空間において，連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1, \quad 0 \leq z \leq xy$$

を満たす点 (x, y, z) からなる立体の体積を求めよ．

[答] $\dfrac{1}{4}$

【Review 4.2.2】

(1) xy 平面において，

$$|\log x| + |\log y| \leq k \quad (k > 0)$$

を満たす領域を図示せよ．また，その面積を求めよ．

(2) xyz 空間において，

$$|\log x| + |\log y| + |\log z| \leq 1$$

を満たす領域の体積を平面 $z = \mathbf{e}^t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ による切口の図形を調べることにより求めよ．

[答] (1) $k(\mathbf{e}^k - \mathbf{e}^{-k})$ (2) $\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{e} + \dfrac{1}{\mathbf{e}}\right)$

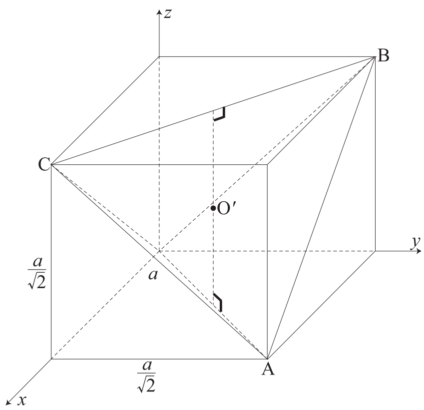
ARISTOS

【Example 4.3】　82 東大

1 辺 $a>0$ の正四面体の各辺に接する球面を考える.

(1) この球面の半径を a の式で表せ.　　(2) 正四面体と球の共通部分の体積を a の式で表せ.

【解説】



(1) 題意の正四面体を内接させる立方体の 1 辺は $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ であり，この立方体の中心 O′ から正四面体の各辺の中点 = 立方体の各面の中心までの距離はすべて等しく $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ なので，題意の球面の半径は,

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(2) **右図**の様に座標を導入すると，立方体の中心 (球の中心)

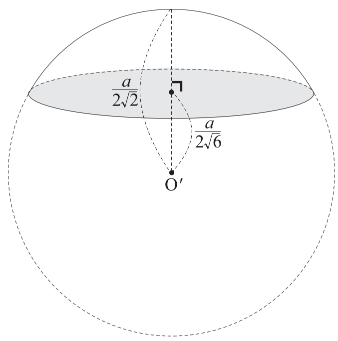
$$\mathrm{O}'\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と正四面体の 3 つの頂点

$$\mathrm{A}\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right),\ \mathrm{C}\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

を通る平面 $x+y+z=\sqrt{2}a$ との距離は,

$$\frac{\left|\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\times 3-\sqrt{2}a\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{a}{2\sqrt{6}} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$



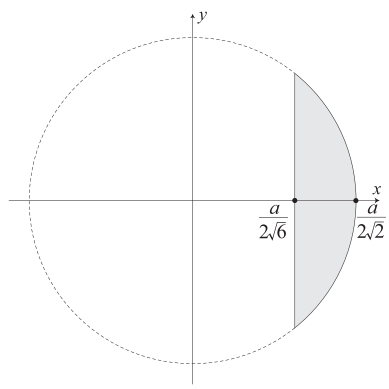
このとき，四面体の各面からはみ出している球面の部分 (**上図**) の体積は,

$$x^2+y^2=\frac{1}{8}a^2\ \wedge\ \frac{a}{2\sqrt{6}}\leq x\leq\frac{a}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

で表される図形 (**下図**) を x 軸周りに回転してできる立体の体積に等しい.

従って，求める体積は,

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2-4\times\pi\int_{\frac{a}{2\sqrt{6}}}^{\frac{a}{2\sqrt{2}}}\left\{\frac{1}{8}a^2-x^2\right\}\mathbf{d}x=\left(\frac{2}{9\sqrt{6}}-\frac{1}{12\sqrt{2}}\right)a^3\pi \qquad \cdots\cdots(3.6)$$



[Note]　題意の立体の概形は次頁の図を参照されたい.

ARISTOS

【Review 4.3】　2003 東大

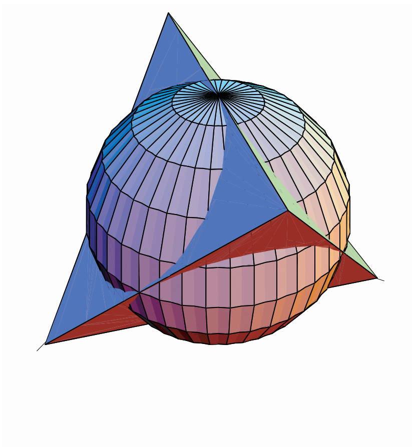
xyz 座標空間内で考える．

平面 $z=0$ 上において，原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\,0,\,1)$ を頂点とする円錐を A とする．また，平面 $z=0$ 上において，点 $(1,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上において，点 $(1,\,0,\,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とし，H, K を 2 つの底面とする円柱を B とする．更に，A, B の共通部分を C とし，$0 \leq t \leq 1$ を満たす t に対して，平面 $z=t$ による C の切口の図形の面積を $S(t)$ で表す．

(1) $0 \leq \theta \leq \pi/2$ のとき，$t = 1-\cos\theta$ として，$S(t)$ を θ の式で表せ．

(2) C の体積を求めよ．

[答]　(1) $\pi + 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta$　(2) $\pi - \dfrac{16}{9}$



ARISTOS