

## 【Example 5.1】 88 東工大

極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ.

**Point** (区分解積分法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{x=0}^{x=1} u(x) dx$$

**Point** (関数の連続性)

$$\text{関数 } u(x) \text{ が } x = a \text{ で連続} \iff \lim_{x \rightarrow a} u(x) = u\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = u(a)$$

## 【解説】

2項係数の定義により,

$$\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} = \frac{(3n)!}{(2n)!} = \frac{(3n)(3n-1)(3n-2) \times \cdots \times (2n+1)}{(2n)(2n-1)(2n-2) \times \cdots \times (n+1)} = \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{2n+2}{n+2} \times \cdots \times \frac{2n+n}{n+n} \quad \cdots (1.1)$$

(与式) = P と置き, 両辺の対数をとれば,

$$\begin{aligned} \log P &= \log \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log \left( \frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (\because \text{対数関数の連続性}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{2n+2}{n+2} \times \cdots \times \frac{2n+n}{n+n} \right) \quad (\because (1.1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \log \frac{2n+1}{n+1} + \log \frac{2n+2}{n+2} + \cdots + \log \frac{2n+n}{n+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2n+k}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \log \frac{2+x}{1+x} dx = \int_0^1 \log(x+2) dx - \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \int_{\tau=2}^{\tau=3} \log \tau d\tau - \int_{\tau=1}^{\tau=2} \log \tau d\tau = 3 \log 3 - 4 \log 2 = \log \frac{27}{16} \quad \cdots (1.2) \end{aligned}$$

(1.2) 両辺の対数はずして,

$$P = \frac{27}{16} \quad \cdots (1.3)$$

【Note】 与式の指数部  $\frac{1}{n}$  を処理するために対数をとるのが計算上のポイントである.その際, 対数関数  $\log x (x > 0)$  の連続性により, 極限操作と関数操作の入れ替えを行っていることに注意.

**Point**

指数部の複雑な式は対数をとって計算する

**【Review 5.1.1】 90 千葉大**

正整数  $n$  に対して,  $P_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}$  と置く.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n}$  を求めよ. (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{P_n}$  を求めよ.

[答] (1)  $\frac{27}{4e}$  (2)  $\exp \cdot \frac{27}{2e}$

**【Review 5.1.2】 93 東京電機大**

正整数  $m$  に対して,

$$S_m(n) = \sum_{r=1}^{n^m-1} [\sqrt[m]{r}]$$

と置くととき, 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_m(n)}{n^{m+1}}$$

ただし,  $[x]$  は実数  $x$  を超えない最大の整数を表す.

[答]  $\frac{m}{m+1}$

**【Example 5.2】 – Mercator の級数 –**

等比数列の和

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} \quad (x \neq -1) \quad \cdots(2.1)$$

を用いて、等式

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \cdots(2.2)$$

の成立を示せ。更に、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 \quad \cdots(2.3)$$

の成立を示せ。

**【解説】**

(2.1) の両辺を区間  $[0, 1]$  で積分して、

$$\begin{aligned} \left[ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \right]_0^1 &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n+1}x^n}{1+x} dx \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \cdots(2.4) \end{aligned}$$

ここで、(2.4) の右辺について、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \left[ \log(x+1) \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \log 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ \therefore \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \log 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \cdots(2.2) \end{aligned}$$

(2.2) において、 $n \rightarrow \infty$  とすると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right) \quad \cdots(2.5)$$

そこで、(2.5) の右辺の極限について考察する。

$0 \leq x \leq 1$  のとき、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \cdots(2.6)$$

が成り立つので、両辺に  $x^n \geq 0$  を掛けて、

$$\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n \quad \cdots(2.7)$$

(2.7) の各辺を区間  $[0, 1]$  で積分して、

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1} \quad \cdots(2.8)$$

(2.8) の各辺において、 $n \rightarrow \infty$  とすると、ハサミウチの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0 \quad \cdots(2.9)$$

従って、(2.5)、(2.9) により、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 \quad \cdots(2.3)$$

**Comment**

計算の流れを整理すると…

- (1) 与えられた無限級数を定積分で表す.
- (2) 積分不可能な関数を積分可能な関数で評価 (近似) する.
- (3) 結果は超越数 (非代数的無理数) の有理数による近似となる.

[Note] 代数的無理数の有理数による近似として, Newton 近似法 (第 7 回参照) がある.

**Point** (無限級数の計算)

入試に出題される無限級数の問題には次の 3 つのタイプがある.

(A) 無限等比級数 
$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

(B) 区分求積法 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 u(x) dx$$

(C) 無限級数の定積分への変換 [Example 5.2]

本教材では扱わないが, (A) 無限等比級数は図形と絡めて出題されることが多い.

**【Review 5.2.1】 - Libniz の級数 -**

等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

の成立を示せ.

[証明略]

**【Review 5.2.2】 95 鹿児島大**

数列  $\{a_n\}$  は,  $a_0 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n$  ( $n \geq 0$ ) によって定義されている.

(1)  $\int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{a_{m-1}} e^{xt} dt = \frac{1}{a_m} + x \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{a_m} e^{xt} dt$  を示せ.

(2)  $e^x = 1 + \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2} + \dots + \frac{x^n}{a_n} + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{a_n} e^{xt} dt$  を数学的帰納法で示せ.

(3)  $0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{a_n} e^t dt < \frac{e-1}{n}$  を示せ. ただし,  $(1-t)^n e^t < e^t$  ( $0 < t < 1$ ) である.

(4)  $e = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$  が成り立つことを示せ.

[証明略]

**【Example 5.3】 - 凸関数不等式 -**

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0), \quad 0 < a < b \text{ とする.}$$

(1)  $0 \leq t \leq 1$  に対して, 不等式

$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a) + tu(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$\int_a^b u(x) \, dx < \frac{b-a}{2} (u(a) + u(b))$$

が成り立つことを示せ.

**【解説】**

(1)  $u''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$  ( $\because x > 0$ ) であるから,  $u(x)$  は下に凸.

そこで, 曲線  $y = u(x)$  上に 2 点

$$A(a, u(a)), \quad B(b, u(b)) \quad (0 < a < b) \quad \dots\dots(3.1)$$

をとれば, 弦  $AB$  は曲線の上側にある. ( $\because$  下に凸の定義)

また,

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \dots\dots(3.2)$$

なる点  $Q$  は線分  $AB$  上にあり, その座標は,

$$Q((1-t)a+tb, (1-t)u(a) + tu(b)) \quad \dots\dots(3.3)$$

更に, 曲線  $y = u(x)$  上の  $x = (1-t)a+tb$  に対応する点  $P$  は,

$$P((1-t)a+tb, u((1-t)a+tb)) \quad \dots\dots(3.4)$$

で表されるので,

(1.a)  $0 < t < 1$  のとき,  $P$  は  $Q$  の下側にあり, 2 点の  $y$  座標を比較して,

$$u((1-t)a+tb) < (1-t)u(a) + tu(b) \quad \dots\dots(3.5)$$

(1.b)  $t = 0 \vee t = 1$  のとき,  $P$  または  $Q$  は,  $A$  または  $B$  に一致するので,

$$u((1-t)a+tb) = (1-t)u(a) + tu(b) \quad \dots\dots(3.6)$$

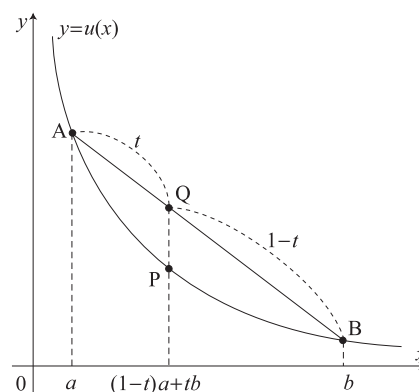
(3.5), (3.6) より,

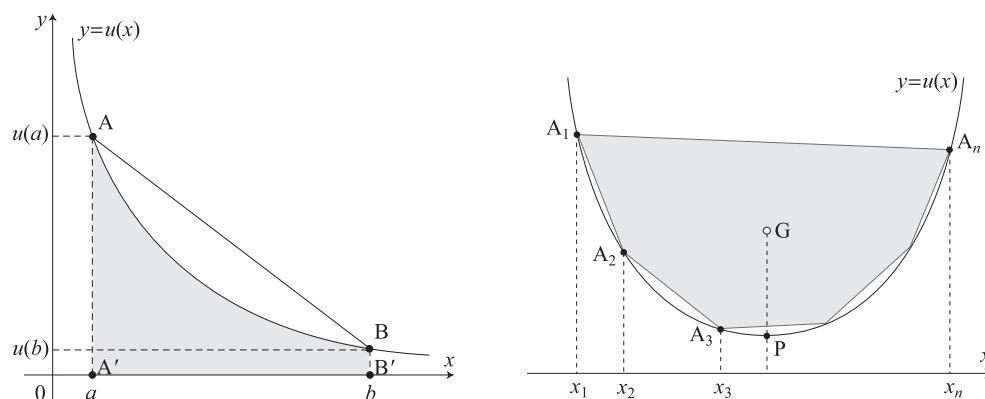
$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a) + tu(b) \quad \dots\dots(3.7)$$

(2) 題意の不等式の左辺は, 次頁左図の網目部の面積を表し,

右辺は台形  $AA'B'B$  の面積を表すので,  $u(x)$  が下に凸であることから,

$$\int_a^b u(x) \, dx < \frac{b-a}{2} (u(a) + u(b)) \quad \dots\dots(3.8)$$



**Point**

下に凸な関数  $u(x)$  ( $u'' > 0$ ) と  $0 \leq t \leq 1$  なる実数  $t$  に対して,

$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a) + tu(b)$$

なる不等式が成り立つ。ここで、等号は、 $t=0 \vee t=1 \vee a=b$  に限り成立。

**Comment**

例題の核心部分は、(1)における関数(曲線)の凸性から導かれる絶対不等式にある。当然、 $u(x)$  が上に凸であっても不等号の向きを逆にすれば同様の不等式が成り立つ。また、下に凸な曲線  $u(x)$  上に分布する  $n$  個の点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対して、各点  $A_k$  に質量  $t_k > 0$  の重みを与えた質点系  $A_1, A_2, \dots, A_n$  の加重重心  $G$  が凸  $n$  角形  $A_1A_2 \dots A_n$  の内部に存在することを既知とすれば(証明は帰納法による),

$$u\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k u(x_k) \quad \dots\dots(3.9)$$

なる不等式が得られる(上右図)。ここで、 $\sum_{k=1}^n t_k = 1$  とする。

[Note] 凸  $n$  角形  $A_1A_2 \dots A_n$  の加重重心とは,

$$G\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k, \sum_{k=1}^n t_k u(x_k)\right) \quad \dots\dots(3.10)$$

なる座標で定義される点である。この意味から不等式(3.9)は,

$$(\text{点 P の } y \text{ 座標}) \leq (\text{点 G の } y \text{ 座標})$$

なる大小関係(P, Gの上下関係)を表している。

**【Review 5.3.1】 2002 北大**

$u(x)$  を微分可能な関数とする.

(1)  $n$  を正の整数とするととき,

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x u(t) dt = x^n \quad (x \neq 1)$$

を満たす関数  $u(x)$  を求めよ.

(2) 任意の実数  $x, y$  に対して,

$$\frac{1}{x-y} \int_y^x u(t) dt = \frac{1}{2}(u(x) + u(y)) \quad (x \neq y)$$

を満たし, 更に, 初期条件  $u(0) = 1, u'(0) = 2$  を満たす関数  $u(x)$  を求めよ.

[答] (1)  $u(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1}$  (2)  $u(x) = 2x + 1$

**【Review 5.3.2】**

区間  $\mathcal{D}$  において 2 回微分可能な関数  $u$  に対して, 次の命題を示せ.

(1)  $t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 = 1, x_1, x_2, a, x \in \mathcal{D} (x \neq a)$  に対して,

$$u(t_1x_1 + t_2x_2) < t_1u(x_1) + t_2u(x_2) \iff u(a) + u'(a)(x-a) < u(x) \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ.

(2)  $a, x \in \mathcal{D} (x \neq a)$  に対して,

$$u''(x) > 0 \iff u(a) + u'(a)(x-a) < u(x) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ.

[Note] ①, ② より,

$$u''(x) > 0 \iff u(t_1x_1 + t_2x_2) < t_1u(x_1) + t_2u(x_2) \quad \dots\dots ③$$

が導かれる. 即ち, 曲線が下に凸であることと 2 次導関数の符号が正であることは同値である.

