【Example 5.1】 88 東工大

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Point (区分求積法)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x$$

【解説】

二項係数の定義により，

$$\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{\dfrac{(3n)!}{(2n)!\,n!}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}=\frac{(3n)(3n-1)\times\cdots\times(3n-(n-1))}{(2n)(2n-1)\times\cdots\times(2n-(n-1))}=\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{2n+2}{n+2}\times\cdots\times\frac{2n+n}{n+n} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

(**与式**) $=\mathrm{P}$ と置き，両辺の対数をとれば，

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{P}&=\log\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \quad (\because\ \textbf{対数関数の連続性})\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{2n+2}{n+2}\times\cdots\times\frac{2n+n}{n+n}\right) \quad (\because\ (1.1))\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2n+1}{n+1}+\log\frac{2n+2}{n+2}+\cdots+\log\frac{2n+n}{n+n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+k/n}{1+k/n}\\
&=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}\,\mathbf{d}x=\int_0^1\log(x+2)\,\mathbf{d}x-\int_0^1\log(1+x)\,\mathbf{d}x\\
&=\int_2^3\log t\,\mathbf{d}t-\int_1^2\log t\,\mathbf{d}t=3\log 3-4\log 2=\log\frac{27}{16} \qquad \cdots\cdots(1.2)
\end{aligned}$$

(1.2) の両辺の対数をはずして，即ち，真数部を比較して，

$$\mathrm{P}=\frac{27}{16} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

[Note] 与式極限関数の指数部 $1/n$ を処理するために対数をとっているのが計算上のポイントである．
また，対数関数 $\log x$ の連続性により，**極限操作と関数操作の入れ替え**を行っていることに注意せよ．即ち，

Point (関数の連続性)

$$\text{関数 } u(x) \text{ が } x=\xi \text{ で連続} \iff \lim_{x\to\xi}u(x)=u\left(\lim_{x\to\xi}x\right)=u(\xi)$$

即ち，x を ξ に**近づけた結果**と x に ξ を**代入した結果**が一致する !!

Point

指数部の複雑な式は**対数値で計算**する

例えば,「対数微分法」も同様の考え方に基づいている.

【Review 5.1.1】 90 千葉大

正整数 n に対して, $\mathrm{P}_n = \left(\dfrac{(3n)!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$ と置く.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}_n}{n}$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\mathrm{P}_n}$ を求めよ.

[答] (1) $\dfrac{27}{4\mathbf{e}}$ (2) $\exp.\dfrac{27}{2\mathbf{e}}$

【Review 5.1.2】 93 東京電機大

正整数 m に対して,

$$S_m(n) = \sum_{r=1}^{n^m-1} \left[\sqrt[m]{r}\,\right]$$

と置くとき, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_m(n)}{n^{m+1}}$$

ただし, $[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す.

[答] $\dfrac{m}{m+1}$

【Example 5.2】 – Mercator の級数 –

等比数列の和の公式

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x} \quad (x\neq -1) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を用いて，次の等式を示せ.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

更に，次の等式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

【解説】

(2.1) の両辺を区間 [0, 1] で積分して，

$$\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]_0^1=\int_0^1\frac{1+(-1)^{n+1}x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x$$

$$\iff 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathbf{d}x+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) の右辺に対して，

$$(\textbf{右辺})=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) において，$n\to\infty$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2+\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

ここで，(2.5) 右辺の極限について考察する.

$0\leq x\leq 1$ のとき，

$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x}\leq 1 \quad \left(\because\ \frac{1}{1+x}\text{の}\textbf{単調減少性}\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

が成り立つので，両辺に $x^n\geq 0$ を乗じて，

$$\frac{1}{2}x^n\leq\frac{x^n}{1+x}\leq x^n \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) の各辺を区間 [0, 1] で積分して，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathbf{d}x\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x\leq\int_0^1 x^n\,\mathbf{d}x \iff \frac{1}{2(n+1)}\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x\leq\frac{1}{n+1} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) の各辺において，$n\to\infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x=0 \quad (\because\ \textbf{ハサミウチの原理}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.5), (2.9) により，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

Comment

計算の要点を整理すると，

- 与えられた無限級数を定積分で表す
- 積分不可能な関数を積分可能な関数で評価 (近似) する
- 結果は超越数 (非代数的無理数) の有理数による近似となる

代数的無理数の有理数による近似法として，Newton **近似法**がある．

Point (無限級数の計算)

入試で出題される「無限級数の問題」には次のタイプがある．

- 無限等比級数 $\quad a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}\quad \bigl(|r|<1\bigr)$
- 区分求積法 $\quad \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u\left(\dfrac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x$
- 無限級数の定積分への変換 [Example 5.2]

本教材では扱わないが，無限等比級数は図形との融合問題として出題されることが多い．

【Review 5.2.1】 – Libniz の級数 –

次の等式の成立を示せ．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$$

[証明略]

【Review 5.2.2】 95 鹿児島大

数列 $\{a_n\}$ は，$a_0=1$，$a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n\geq 0)$ によって定義されている．

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{(1-t)^{m-1}}{a_{m-1}}\mathbf{e}^{xt}\,\mathbf{d}t=\frac{1}{a_m}+x\int_0^1\frac{(1-t)^m}{a_m}\mathbf{e}^{xt}\,\mathbf{d}t$ を示せ．

(2) $\displaystyle\mathbf{e}^x=1+\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2}+\cdots+\frac{x^n}{a_n}+x^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{a_n}\mathbf{e}^{xt}\,\mathbf{d}t$ を数学的帰納法で示せ．

(3) $\displaystyle 0<\int_0^1\frac{(1-t)^n}{a_n}\mathbf{e}^t\,\mathbf{d}t<\frac{\mathbf{e}-1}{n}$ を示せ．ただし，$(1-t)^n\mathbf{e}^t<\mathbf{e}^t\ (0<t<1)$ である．

(4) $\displaystyle\mathbf{e}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$ が成り立つことを示せ．

[証明略]

【Example 5.3】　– 凸関数不等式 –

$u(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$，$0<x_1<x_2$ とする．

(1) $0\leq t\leq 1$ に対して，不等式

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big)\leq(1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)$$

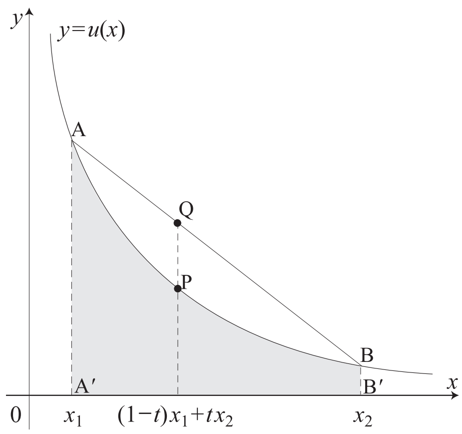
が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$\int_{x_1}^{x_2}u(x)\,\mathbf{d}x<\frac{x_2-x_1}{2}\big(u(x_1)+u(x_2)\big)$$

が成り立つことを示せ．

【解説】



(1) $u''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0\ (x>0)$ であるから，$u(x)$ は下に凸．

そこで，$y=u(x)$ 上に 2 点

$$\mathrm{A}\big(x_1,\,u(x_2)\big),\ \mathrm{B}\big(x_2,\,u(x_2)\big)\quad(0<x_1<x_2)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

をとれば，線分 AB は曲線の上側にある．$\big(\because\ u(x)$ の下方凸性$\big)$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(0\leq t\leq 1)\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

なる点 Q は線分 AB 上にあり，その座標は，

$$\mathrm{Q}\big((1-t)x_1+tx_2,\,(1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)\big)\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

更に，$y=u(x)$ 上の $x=(1-t)x_1+tx_2$ に対応する点 P は，

$$\mathrm{P}\big((1-t)x_1+tx_2,\,u\big((1-t)x_1+tx_2\big)\big)\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

と表されるので，

● $0<t<1$ のとき，P は Q の下側にあり，2 点の y 座標を比較して，

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big)<(1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

● $t=0\ \vee\ t=1$ のとき，$\mathrm{P}=\mathrm{A}$ または $\mathrm{Q}=\mathrm{B}$ が成り立つので，

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big)=(1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

(3.5), (3.6) により，

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big)\leq(1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

(2) 不等式の左辺は，**上図網目部**の面積を表し，右辺は台形 AA′B′B の面積を表すので，

$$\int_{x_1}^{x_2}u(x)\,\mathbf{d}x<\frac{x_2-x_1}{2}\big(u(x_1)+u(x_2)\big)\qquad\cdots\cdots(3.8)$$

Point

- 下に凸な関数 $u(x)$ $(u''>0)$，$0 \leq t \leq 1$ なる実数 t に対して，

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big) \leq (1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)$$

なる不等式が成り立つ．ここで，等号は，$t=0 \lor t=1 \lor x_1=x_2$ に限り成立．

- 上に凸な関数 $u(x)$ $(u''<0)$，$0 \leq t \leq 1$ なる実数 t に対して，

$$u\big((1-t)x_1+tx_2\big) \geq (1-t)\,u(x_1)+t\,u(x_2)$$

なる不等式が成り立つ．ここで，等号は，$t=0 \lor t=1 \lor x_1=x_2$ に限り成立．

Comment

例題の核心部分は，(1) における関数 (曲線) の凸性から導かれる**絶対不等式**にある．当然，$u(x)$ が上に凸であれば不等号の向きを逆にして同様の不等式が成り立つ．また，下に凸な曲線 $u(x)$ 上に分布する n 個の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ に対して，各点 A_k に質量 $t_k \geq 0$ の重みを与えた質点系 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ の加重重心 G が凸 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ の内部に存在することを既知とすれば (**証明は帰納法による**)，

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k\,u(x_k) \ \land\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \ \land\ t_k \geq 0 \ \ (k=1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

なる不等式が得られる．(**下図**)

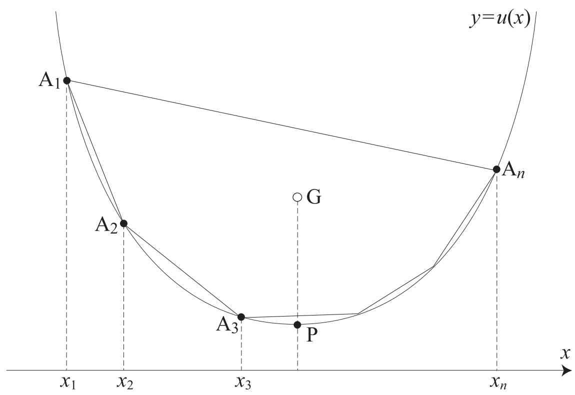
[Note]　凸 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ の加重重心とは，

$$\mathrm{G}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k,\ \sum_{k=1}^{n} t_k\,u(x_k)\right) \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

によって定義される点 G である．このとき，不等式 (3.9) は，

$$\big(\text{点 P の } y \text{ 座標}\big) \leq \big(\text{点 G の } y \text{ 座標}\big)$$

なる大小関係 (P, G の上下関係) を表している．(**下図**)



【Review 5.3.1】　2002 北大

$u(x)$ を微分可能な関数とする.

(1) n を正整数とするとき,

$$\frac{1}{x-1}\int_1^x u(t)\,\mathbf{d}t = x^n \quad (x \neq 1)$$

を満たす関数 $u(x)$ を求めよ.

(2) 任意の実数 x, y に対して,

$$\frac{1}{x-y}\int_y^x u(t)\,\mathbf{d}t = \frac{1}{2}\bigl(u(x)+u(y)\bigr) \quad (x \neq y)$$

を満たし, 更に, 初期条件 $u(0)=1$, $u'(0)=2$ を満たす関数 $u(x)$ を求めよ.

[答] (1) $u(x)=(n+1)x^n - nx^{n-1}$　(2) $u(x)=2x+1$

【Review 5.3.2】

区間 $\mathfrak{D}$ において 2 回微分可能な関数 u に対して, 次の命題を示せ.

(1) $t_1, t_2 > 0$, $t_1+t_2=1$, $x_1, x_2, a, x \in \mathfrak{D}$ $(x \neq a)$ に対して,

$$u(t_1x_1+t_2x_2) < t_1\,u(x_1)+t_2\,u(x_2) \iff u(a)+u'(a)(x-a) < u(x) \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ.

(2) $a, x \in \mathfrak{D}$ $(x \neq a)$ に対して,

$$u''(x) > 0 \iff u(a)+u'(a)(x-a) < u(x) \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ.

[Note]　①, ② により,

$$u''(x) > 0 \iff u(t_1x_1+t_2x_2) < t_1\,u(x_1)+t_2\,u(x_2)$$

が導かれる. 即ち, 曲線が下に凸であることと 2 次導関数の符号が正であることは同値である.