【Example 6.1】 – 水の流入 · 流出問題 –

$0 \leq x \leq 1$ において微分可能かつ単調増加な関数

$$y = u(x) \quad \big(u(0) = 0 \ \land \ u(1) = 1\big)$$

があり，曲線 $y = u(x)$ を y 軸の周りに回転して得られる容器に毎秒 k の割合で水を注入する．
注入し始めてから t 秒後の深さを y として，t 秒後の水面の面積 S の増加速度は y^{-1} である．
このとき，$u(x)$ を求めよ．

Point (水の問題の主要変数)

時刻 t における水の容積を V，水面の高さを h，水面の面積を S とすると，

1) 水面の上昇速度 : $\dfrac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t}$ 2) 水面の拡大速度 : $\dfrac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t}$ 3) 水の容積増加率 : $\dfrac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}t} = \dfrac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}h} \times \dfrac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t} = S \times \dfrac{\mathbf{d}h}{\mathbf{d}t}$

3) は**水の流入 (流出) 速度** = **水面の面積** × **水面の上昇 (下降) 速度**を意味しており特に重要である．

水の流入 · 流出問題では，変数 V, h, S が混在し，物理的なイメージを描いて計算しないと混乱する．
これらの変数は時間 t を媒介変数として相互に結びついているので，t の存在を意識すると整理し易い．

【解説】

題意より，水の注入速度が k であることより，

$$\frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}y} \times \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} \iff k = S \times \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

また，水面の拡大速度が y^{-1} であることより，

$$\frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t} = y^{-1} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.1), (1.2) から $\mathbf{d}t$ を消去して，

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} \times \frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}S} = \frac{k}{S} \times y \iff \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}S} = k \times \frac{y}{S} \ (\textbf{変数分離形の微分方程式}) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) の両辺を変数 S で不定積分して，

$$\int \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}S}\,\mathbf{d}S = k\int \frac{y}{S}\,\mathbf{d}S \iff \int \frac{\mathbf{d}y}{y} = k\int \frac{\mathbf{d}S}{S} \ \big(\because\ y > 0,\, S > 0\big) \iff \log y = k \log S + C_1 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

ここで，$C_1 = \log C_2$ と書き換えると，

$$\log y = \log\big(C_2 S^k\big) \iff y = C_2 S^k = C_2(\pi x^2)^k \quad \big(\because\ S = \pi x^2\big) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

更に，$y_{x=1} = u(1) = 1$ より，$C_2 = \pi^{-k}$ を得るので，

$$u(x) = x^{2k} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

Comment

ポイントは，(1.1), (1.2) から時間変数 t を消去して，S, y の微分方程式 (1.3) を導く部分にある．
特に，(**水の流入速度**)=(**水面の面積**)×(**水面の上昇速度**) を用いている (1.1) が解法の核心部分である．

【Revies 6.1.1】 97 東大

直円柱形の石油タンクが側面の一母線で水平な地面と接する形で横倒しになり，地面と接する一点に穴があいて石油が流出し始めた．倒壊前の石油タンクは満杯の状態で，一時間後の現在までに半分の石油が流失した．単位時間当たりの流失量は穴から測った油面の高さの平方根に比例するとき，微分方程式を立てて，この後何時間何分で全部の石油が流失するかを予測せよ．ただし，分未満は切り捨てよ．

[答] 1 時間 49 分後

【Review 6.1.2】 95 京大

高さ h の容器がある．底面は半径 $a>0$ の円，側面は $x=u(y)$ $(0\leq y\leq h)$ のグラフを y 軸の周りに回転したものである．ただし，$u(y)$ は正値連続関数で，$u(0)=a$ とする．この容器に単位時間当り一定の割合 V で水を入れたとき，T 時間後に一杯になり，$t\,(<T)$ 時間後の水面の面積は $Vt+\pi a^2$ であった．
このとき，$u(y)$ を決定し，T を求めよ．

[答] $u(y)=a\exp.\dfrac{y}{2}$， $T=\dfrac{\pi a^2}{V}\left(\mathbf{e}^h-1\right)$

【Example 6.2】 – 微分方程式による曲線の定義 –

(1) 微分方程式

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = -\frac{x}{y} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

の解で，初期条件

$$(x,\ y) = (a,\ b) \quad (a > 0,\ \ b > 0) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

を満たす x の関数 $y(x)$ を求めよ．

(2) 点 $(a,\ b)$ を通る曲線 $\mathfrak{C}$ 上の任意の点における法線が原点を通るとき，$\mathfrak{C}$ の方程式を求めよ．

【解説】

(1) (2.1) の両辺を x で不定積分して，

$$\int \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\,\mathbf{d}x = -\int \frac{x}{y}\,\mathbf{d}x \iff \int y\,\mathbf{d}x = -\int x\,\mathbf{d}x \ \land\ y \neq 0$$

$$\iff \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \land y \neq 0 \iff x^2 + y^2 = C_2 \land y \neq 0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

初期条件 (2.2) により，

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad (y \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

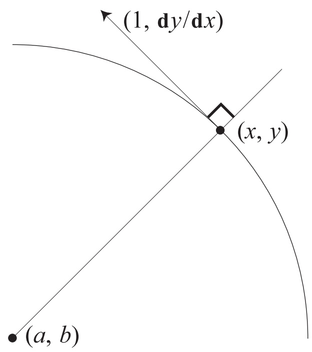
(2.4) を y について解いて，

$$y = \sqrt{(a^2 + b^2) - x^2} \quad (y \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2) $\mathfrak{C}$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ と置けば，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ は P における $\mathfrak{C}$ の法線方向のベクトルを表す．

このとき，P における接線方向のベクトルとの関係に注意して，



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{d}y/\mathbf{d}x \end{pmatrix} = 0 \iff x + y\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) を x で不定積分して，

$$x^2 + y^2 = C \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

$\mathfrak{C}$ が点 $(a,\ b)$ を通るので，

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

即ち，(2.8) が求める $\mathfrak{C}$ の方程式である．

Comment

微分方程式 (2.1), (2.6) の違いと，それらの解 (2.5), (2.8) の違いに注目してほしい．
(1) で求める解関数が $y(x)$ 型 **(陽関数)** であるのに対して，(2) では解関数に陽関数という制限がなく，より一般的な $u(x,\ y) = 0$ 型 **(陰関数)** の形の解が要求されている．更に，(2.1) は $y = 0$ の点では定義されておらず，そこから導かれる円の方程式 (2.4) も $y = 0$ の点では定義されない．即ち，(2.4) は $y = 0$ の点で不連続になるため，点 $(a,\ b)$ を含む半円の部分 (2.5) が解関数となる．一方，(2.6) は $x = 0,\ y = 0$ のいずれの点でも定義されているため，円全体を表す (2.8) が解関数となる．

Comment

一定点からの距離が一定である点の集合として定義される曲線は，曲線上の任意の点における法線が，その定点を通ると云う性質を持つ．逆に，この性質を持つ曲線は円に限られるのだろうか ?? 例題の結果は，その答えを肯定的に導くものである．即ち，**一定点から等距離にある点の集合** = **法線が一定点を通る点の集合**が成り立つのである．この事実は，円の定義を「法線が一定点を通る点の集合」としても良いことを意味する．前頁の解説では微分方程式を処理する計算の部分に目を奪われがちであるが，設問の本質的な意図が見えれば，「数 C」で扱う**曲線論**の理解も広がるはずである．

【Review 6.2.1】 – 直角双曲線 –

第 1 象限内にある曲線上の任意の点 P における接線の x 切片，y 切片をそれぞれ A, B とする．
PA = PB が常に成り立つとき，この曲線の方程式を求めよ．

[答] $xy = k \ \ (x > 0,\ y > 0,\ k > 0)$

【Review 6.2.2】 93 大阪大

関数 $u(x)$ は第 2 次導関数を持ち，$u(0) < 0$ を満たす．
曲線 $y = u(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{Q}(x,\ y+1)$ とするとき，
$\angle\mathrm{OPQ}$ の 2 等分線が P における法線と一致する．このとき，次の手順で $u(x)$ を求めよ．
(1) $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．
(2) $v(x) = u'(x)$ と置くとき，$v(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．
(3) $u(0) = -1$ のとき，$u(x)$ を決定せよ．

[答] (1) $xu'(x)^2 - 2u(x)u'(x) - x = 0$ (2) $xv'(x) = v(x)$ (3) $u(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$

【Review 6.2.3】 – 等角螺旋 –

xy 平面上の曲線 $\mathfrak{C}$ に対して，$\mathfrak{C}$ 上の任意の点 P における位置ベクトルと接ベクトルのなす角が一定であるとき，この曲線 $\mathfrak{C}$ を極方程式で表せ．

[答] $r(\theta) = C \exp.k\theta \ \ (C,\ k:$ 定数$)$

【Example 6.3】 – 積分方程式 (微分型) –

すべての実数 x に対して,

$$\int_0^x t\,u(x-t)\ \mathbf{d}t = \int_0^x u(t)\ \mathbf{d}t + \sin x + \cos x - x - 1 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たす連続関数 $u(x)$ を求めよ.

Point

積分方程式 (微分型) は,**微積分の基本定理**を用いて積分形を解消する

微分積分の基本定理: $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\displaystyle\int_a^x u(t)\ \mathbf{d}t = u(x), \qquad \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\displaystyle\int_a^{v(x)} u(t)\ \mathbf{d}t = u(v(x))\cdot v'(x)$

[Note] 積分形が解消された後は,**初期条件を伴う微分方程式**に帰着される.

【解説】

(3.1) の左辺の積分において,$s = x - t$ と置き換えて,

$$\int_0^x t\,u(x-t)\ \mathbf{d}t = \int_x^0 (x-s)\,u(s)\,(-\mathbf{d}s) = x\int_0^x u(s)\ \mathbf{d}s - \int_0^x s\,u(s)\ \mathbf{d}s \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) により,(3.1) の両辺を x で微分すると,

$$\int_0^x u(s)\ \mathbf{d}s = u(x) + \cos x - \sin x - 1 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) の両辺を x で微分して,

$$u(x) = u'(x) - \sin x - \cos x \iff u'(x) - \sin x = u(x) + \cos x \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

$v(x) = u(x) + \cos x$ と置けば,$v'(x) = u'(x) - \sin x$ であるから,

$$(3.4) \iff v'(x) = v(x) \iff \frac{\mathbf{d}v(x)}{\mathbf{d}x} = v(x) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を満たす $v(x)$ は,$v(x) = C\,\mathbf{e}^x$ (C : 定数) に限られるから,

$$v(x) = u(x) + \cos x = C\,\mathbf{e}^x \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.3) において $x = 0$ として,$u(0) = 0$ を得るので,

$$u(x) = \mathbf{e}^x - \cos x \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

Comment

(3.5) の解法; $v(x) \neq 0$ の下に (3.5) の両辺を x で不定積分して,

$$\int \frac{\mathbf{d}v(x)}{\mathbf{d}x}\ \mathbf{d}x = \int v(x)\ \mathbf{d}x \iff \int \frac{\mathbf{d}v(x)}{v(x)} = \int \mathbf{d}x \quad (\because\ v(x) \neq 0)$$

$$\iff \log|v(x)| = x + C_1 \iff |v(x)| = \mathbf{e}^{x+C_1} = C_2\,\mathbf{e}^x \ \left(C_2 = \mathbf{e}^{C_1}\right)$$

$$\iff v(x) = C_3\,\mathbf{e}^x \ \left(C_3 = \pm C_2\right) \iff v(x) = C\,\mathbf{e}^x \ \left(C : \text{任意定数}\right)$$

【Review 6.3.1】 92 埼玉大

(1) $y=\mathbf{e}^{-2x}v(x)$ として，次の等式を満たす x の関数 y を求めよ．

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}+2y=2x\,\mathbf{e}^{-x}$$

(2) 微分可能な関数 $u(x)$ が次の等式を満たす．

$$u(x)+\int_0^x \mathbf{e}^{-t}u(x-t)\ \mathbf{d}t=x^2\mathbf{e}^{-x}$$

このとき，$y=u(x)$ は (1) の等式を満たすことを示し，$u(x)$ を求めよ．

[答] (1) $y=2(x-1)\mathbf{e}^{-x}+C\,\mathbf{e}^{-2x}$ (2) $u(x)=2(x-1)\mathbf{e}^{-x}+2\mathbf{e}^{-2x}$

【Review 6.3.2】

関数列 $\{u_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を次の関係式で定義する．

$$u_0(x)=1,\quad u_{n+1}(x)=1-\int_0^x u_n(t)\ \mathbf{d}t\quad (n=0,1,2,\cdots : x\geq 0)$$

また，次の積分方程式を満たす関数 $u(x)$ を考える．

$$u(x)=1-\int_0^x u(t)\ \mathbf{d}t$$

(1) 関数 $u(x)$ を求めよ． (2) 関数列 $\{u_n(x)\}$ を求めよ．
(3) $x\geq 0$ のとき，

$$\left|u(x)-u_n(x)\right|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

[答] (1) $u(x)=\mathbf{e}^{-x}$ (2) $u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$