【Example 7.1】 – Cauchy の平均値の定理 –

$u(x)$, $v(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能なとき，

$$\begin{pmatrix} u(b)-u(a) \\ v(b)-v(a) \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} u'(c) \\ v'(c) \end{pmatrix}$$

を満たす c $(a < c < b)$ が存在することを示せ．

[Note] 証明には次の Rolle **の定理**が必要となるが，教科書の内容なので，ここでは言及しない．

Rolle の定理

$u(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能なとき，

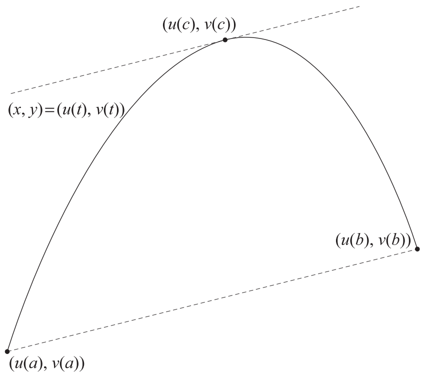
$$u'(c) = 0 \ \wedge \ u(a) = u(b)$$

を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

【解説】

関数 $\varphi(x)$ を次のように定義する；

$$(v(b)-v(a))(u(x)-u(a)) - (u(b)-u(a)(v(x)-v(a)) \overset{\text{put}}{=} \varphi(x)$$



このとき，$\varphi(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能であり，更に，

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

が成り立つので，Rolle **の定理**により，

$$\begin{aligned} \varphi'(c) = 0 \iff & (v(b)-v(a))\,u'(c) - (u(b)-u(a))\,v'(c) = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} u(b)-u(a) \\ v(b)-v(a) \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} u'(c) \\ v'(c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

Comment

例題の定理の直観的な理解は次のようである (**右上図参照**);
xy 平面上の parameter 曲線 $(x, y) = (u(t), v(t))$ $(a \leq t \leq b)$ に対して，端点 A$(u(a), v(a))$, B$(u(b), v(b))$ を結ぶ線分 AB の方向と，曲線上のある点 $t = c$ における接ベクトル $(u'(c), v'(c))$ の方向とが一致するような点 C$(u(c), v(c))$ が $a < t < b$ なる範囲に存在する．これは [Example 1.3] で扱った**平均値の定理**の媒介変数関数バージョンと解釈できる．この定理により直ちに次頁の de l'Hopital **の定理**が導かれる．

de l'Hopital の定理

$u(x),\ v(x)$ は $x=c$ を含む開区間 (a,b) で微分可能であり，

$$u(c)=v(c)=0 \ \wedge \ v'(x)\neq 0 \ (x\neq c) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

を満たすとき，

$$\lim_{x\to c}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to c}\frac{u'(x)}{v'(x)} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が成り立つ.

Comment

(1.2) を正確に表現すると，『極限

$$m=\lim_{x\to c}\frac{u'(x)}{v'(x)} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

が存在するとき，極限

$$\lim_{x\to c}\frac{u(x)}{v(x)} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

も存在して m と一致する』となる.

[Note] de l'Hopital **の定理**を既知として次の問題を解いてみよう.

【Review 7.1.1】

上の定理を用いて，極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{1+x}-\sin(1+x^2)}{\cos\sqrt{1+x}-\cos(1+x^2)}$$

の値を求めよ. (**必要なら電卓を用いてよい**)

【Review 7.1.2】

定理を用いて，次の極限値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\sin^3 x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2+x^4)}{x(\mathbf{e}^x-1)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{2\log(1+x)-2x+x^2}$

【Example 7.2】 – Taylor の定理 –

$u(x)$ は区間 $\mathfrak{D}$ で n 回以上微分可能な関数とし，$a \in \mathfrak{D}$ とする．
このとき，$\forall x \in \mathfrak{D}$ に対して，

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{(k)}(a)\,(x-a)^k + \frac{1}{n!} u^{(n)}(c)\,(x-a)^n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を満たす $c\ (a \leqq c \leqq x)$ が存在する．

【解説】

$v(x)$ を以下で定義する；

$$v(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{(k)}(a)\,(x-a)^k \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

このとき，即座に

$$v(a) = v'(a) = v''(a) = \cdots\cdots = v^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

が導かれる．更に，

$$w(x) = (x-a)^n \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と置くと，

$$w(a) = w'(a) = w''(a) = \cdots\cdots = w^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

このとき，

$$\frac{v(x)}{w(x)} = \frac{v(x)-v(a)}{w(x)-w(a)} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

に対して，Cauchy **の平均値の定理**を用いて，

$$\frac{v(x)-v(a)}{w(x)-w(a)} = \frac{v'(c_1)}{w'(c_1)} \quad (a \leqq c_1 \leqq x) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

を満たす c_1 が存在する．
同様にして，

$$\frac{v'(c_1)}{w'(c_1)} = \frac{v'(c_1)-v'(a)}{w'(c_1)-w'(a)} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

に対して，Cauchy **の平均値の定理**を用いて，

$$\frac{v'(c_1)-v'(a)}{w'(c_1)-w'(a)} = \frac{v''(c_2)}{w''(c_2)} \quad (a \leqq c_2 \leqq c_1) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

を満たす c_2 が存在する．
この操作を繰り返して，

$$\frac{v(x)}{w(x)} = \frac{v^{(n-1)}(c_{n-1})}{w^{(n-1)}(c_{n-1})} \quad (a \leqq c_{n-1} \leqq c_{n-2}) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

このとき，(2.10) の右辺において，

$$w^{(n-1)}(c_{n-1}) = n!(c_{n-1}-a) \ \wedge\ v^{(n-1)}(c_{n-1}) = u^{(n-1)}(c_{n-1}) - u^{(n-1)}(a) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

であるから，(2.11) を (2.10) の右辺に代入して，

$$\frac{v^{(n-1)}(c_{n-1})}{w^{(n-1)}(c_{n-1})} = \frac{u^{(n-1)}(c_{n-1}) - u^{(n-1)}(a)}{n!(c_{n-1}-a)} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

(2.12) の右辺に**平均値の定理**を用いて，

$$\frac{u^{(n-1)}(c_{n-1})-u^{(n-1)}(a)}{c_{n-1}-a}=u^{(n)}(c) \quad (a \leqslant c \leqslant c_{n-1}) \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

を満たす c が存在する．

(2.10), (2.11) により，

$$\frac{v(x)}{w(x)}=\frac{v^{(n-1)}(c_{n-1})}{w^{(n-1)}(c_{n-1})}=\frac{v^{(n-1)}(c_{n-1})-v^{(n-1)}(a)}{n!(c_{n-1}-a)}=\frac{1}{n!}\times u^{(n)}(c)$$

$$\iff v(x)=\frac{1}{n!}\times u^{(n)}(c)\times w(x)=\frac{1}{n!}u^{(n)}(c)\,(x-a)^n \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

を満たす $c\ (a \leqslant c \leqslant c_{n-1})$ が存在する．

(2.2), (2.14) により，

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}u^{(k)}(a)\,(x-a)^k+\frac{1}{n!}u^{(n)}(c)\,(x-a)^n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

[Note]　証明は，Cauchy **の平均値の定理**を n 回繰り返し用い，最後に**平均値の定理**で完結する，という単純な構造なので容易に理解できるであろう．そこで，Taylor の定理の目指すもの · 主張について考察してみる．

$n=1$ の場合; (2.1) は,

$$u(x)=u(a)+u'(c)\,(x-a) \iff \frac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(c) \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

となり，**平均値の定理**が成り立つことを意味している．

$n=2$ の場合; (2.1) は,

$$u(x)=u(a)+u'(a)\,(x-a)+\frac{1}{2!}u''(c)\,(x-a)^2 \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

ここで，$|u''(x)| \leq M$ (定数) を仮定すると，

$$|u(x)-(u(a)+u'(a)\,(x-a))| \leq \frac{1}{2!}M(x-a)^2 \qquad \cdots\cdots(2.17)$$

が成り立ち，(2.17) は $u(x)$ の 1 次式による近似の誤差が $(x-a)^2$ 程度であることを意味する．

更に，(2.1) の**剰余項**に注目して，$|u^{(n)}(x)| \leq M$ (定数) を仮定すると，

$$\frac{(x-a)^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \cdots\cdots(2.18)$$

となるので，**剰余項**は 0 に収束して，

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u^{(k)}(a)\,(x-a)^k \qquad \cdots\cdots(2.19)$$

即ち，(2.19) は無限回微分可能な関数 $\mathbf{e}^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\cdots$ 等が x の無限次数の多項式で表現できることを意味する．この様な関数の無限級数による表現を Taylor **展開**と云い，これに関連する入試問題は非常に多い．

【Review 7.2.1】

(2.19) において，$a=0$, $u(x)=\sin x \vee \cos x \vee \mathbf{e}^x$ として，各関数 $u(x)$ を Taylor 展開せよ．

その結果を利用して，Euler **の公式**

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}=\cos x+\mathbf{i}\sin x \qquad \cdots\cdots(2.20)$$

を示せ．ここで，$\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ は虚数単位である．

【発展 – 無限級数展開と無限級数 –】

ある関数の「無限級数による表現」の発想は極めて単純で，例えば，三角関数 $\sin x$ は $x = n\pi$ $(n:\text{整数})$ なる無限個の x の値に対して 0 となるので，

$$\sin x \cong \cdots\cdots(x-(-2\pi))(x-(-\pi))(x-0)(x-\pi)(x-2\pi)\cdots\cdots = C\prod_{n:\text{整数}}(x-n\pi) \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

と近似できると考えられる．このことを用いて，ある無限級数について考察してみよう．
まず，$x = k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n)$ に対して，$u_n(x) = 0$ となる整関数の列 $\{u_n(x)\}$ を

$$u_n(x) = c_n \prod_{-n\le k\le n}(x-k\pi) \quad (c_n:\text{定数}) \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

と定義し，$x = 0$ における微分係数を $u_n{}'(0) = 1$ と定めれば，

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2\,\pi^{2n}} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

が導かれる．
$u_n(x)$ を昇冪の順に展開すると，

$$u_n(x) = x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k\pi)^2}x^3 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

ここで，$n\to\infty$ とすると，

$$u_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = x - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^3 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

この極限が $\sin x$ と同一視できること，および，$\sin x$ の級数展開

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

とを考慮すれば，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \iff \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \cdots\cdots(2.1.7)$$

なる結果が得られる．更に，$\cos x$ についても同様にして，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \iff \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots = \frac{\pi^2}{8} \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

なる結果を得るが，(2.1.8) は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \cdots\cdots(2.1.9)$$

としても得られる．

【発展 – Catlan Number と Taylor 展開 –】

Catlan Number : c_n の母関数を求めてみる;
数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を係数とする (無限次) 多項式

$$u(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

に対して，漸化式

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots\cdots + c_n c_0 \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

を用いれば，

$$\begin{aligned}\{u(x)\}^2 &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) \\ &= {c_0}^2 + (c_0 c_1 + c_1 c_0)x + (c_0 c_2 + {c_1}^2 + c_2 c_0)x^2 + \cdots + (c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots + c_n c_0)x^n + \cdots\cdots \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{n+1} x^n + \cdots\cdots = \frac{u(x) - c_0}{x} \qquad \cdots\cdots(2.2.3)\end{aligned}$$

(2.2.3) を整理して，

$$x\{u(x)\}^2 - u(x) + c_0 = 0 \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

これを $u(x)$ について解いて，

$$u(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

ここで，$x \to 0$ のときに $u(x)$ が発散しないために，

$$u(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \cdots\cdots(2.2.6)$$

は無縁根と考えてよい．

一方，無理関数 $\sqrt{1-4x}$ の $x = 0$ の周りの taylor 展開

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n)!}{n!} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \cdots\cdots(2.2.7)$$

を用いれば，

$$u(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!\,n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \cdots\cdots(2.2.8)$$

が成り立つので，(2.2.5) を $\{c_n\}$ の母関数と考えてよい．

[Note]　微分公式

$$\frac{\mathbf{d}^{n+1}}{\mathbf{d}x^{n+1}} \sqrt{1-4x} = -\frac{2(2n)!}{n!} (1-4x)^{-\frac{2n+1}{2}} \qquad \cdots\cdots(2.2.9)$$

が成り立つことを帰納法によって確認し，関数 $\sqrt{1-4x}$ を $x = 0$ の周りで Taylor 展開せよ．

【発展 – Stirling Number の一般項 – 】

数列 $\{{}_n\mathrm{S}_k\}_{k=0}^{n}$ を係数とする関数 $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{S}_k x^k = {}_n\mathrm{S}_0 + {}_n\mathrm{S}_1 x + {}_n\mathrm{S}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{S}_n x^n \qquad \cdots\cdots(2.3.1)$$

によって定義する．ただし，${}_n\mathrm{S}_0 = 0\ (n \geq 1)$ とする．

このとき，

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = {}_{n+1}\mathrm{S}_0 + {}_{n+1}\mathrm{S}_1 x + \cdots\cdots + {}_{n+1}\mathrm{S}_{n+1} x^{n+1} \\ u_n{}'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{S}_k x^{k-1} = {}_n\mathrm{S}_1 + 2{}_n\mathrm{S}_2 x + 3{}_n\mathrm{S}_3 x^2 + \cdots\cdots + n{}_n\mathrm{S}_n x^{n-1} \end{cases}$$

であるから，漸化式

$${}_{n+1}\mathrm{S}_k = {}_n\mathrm{S}_{k-1} + k{}_n\mathrm{S}_k \qquad \cdots\cdots(2.3.2)$$

を考慮すれば，関数列 $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，

$$u_{n+1}(x) = x(u_n(x) + u_n{}'(x)) \qquad \cdots\cdots(2.3.3)$$

なる漸化式が成り立つ．ここで，$u_0(x) = 1$，即ち，${}_0\mathrm{S}_0 = 1$ とする．

そこで，

$$\mathbf{e}^x u_n(x) \overset{\text{put}}{=} v_n(x) \qquad \cdots\cdots(2.3.4)$$

によって関数列 $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義すると，

$$v_n{}'(x) = \mathbf{e}^x(u_n(x) + u_n{}'(x)) \qquad \cdots\cdots(2.3.5)$$

であるので，(2.3.3) の両辺に $\mathbf{e}^x$ を乗じて，

$$v_{n+1}(x) = x \times v_n{}'(x) \iff v_{n+1}(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)v_n(x) \qquad \cdots\cdots(2.3.6)$$

$$\therefore\ v_n(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)v_{n-1}(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^2 v_{n-2}(x) = \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n v_0(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n \mathbf{e}^x u_0(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n \mathbf{e}^x\,{}_0\mathrm{S}_0\,x^0$$

$$\therefore\ v_n(x) = \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n \mathbf{e}^x \iff u_n(x) = \mathbf{e}^{-x}\left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n \mathbf{e}^x \qquad \cdots\cdots(2.3.7)$$

一方，$\mathbf{e}^x$, $\mathbf{e}^{-x}$ に対する Taylor 展開

$$\mathbf{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k\,, \quad \mathbf{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^k \qquad \cdots\cdots(2.3.8)$$

を用いて，

$$x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\mathbf{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{1}{k!}x^k\,, \quad \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^2\mathbf{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{1}{k!}x^k\,, \quad \cdots\cdots, \quad \left(x\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\right)^n\mathbf{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} k^n\frac{1}{k!}x^k \qquad \cdots\cdots(2.3.9)$$

(2.3.8), (2.3.9) を (2.3.7) に代入して，

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} k^n\frac{1}{k!}x^k \qquad \cdots\cdots(2.3.10)$$

ここで，(2.3.10) の右辺は，

$$\left\{\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}x^k+\cdots\cdots\right\}$$
$$\times\left\{\frac{0^n}{0!}+\frac{1^n}{1!}x+\frac{2^n}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{k^n}{k!}x^k+\cdots\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(2.3.11)$$

なる構造であるから，(2.3.11) を展開したときの x^k の係数に注目して，

$${}_n\mathrm{S}_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(k-j)^n}{j!(k-j)!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j{}_k\mathrm{C}_j(k-j)^n \quad \cdots\cdots(2.3.12)$$

[Note]　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ の母関数 $(1+x)^n$ を Taylor 展開することにより，

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

が成り立つことを確認せよ．

【Example 7.3】 – Newton 近似法 –

閉区間 $[a,\ b]$ において，

$$u''(x) > 0 \ \wedge\ u(a) < 0 \ \wedge\ u(b) > 0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $u(x) = 0$ は開区間 $(a,\ b)$ において，唯一解 α を持つことを示せ．

(2) 漸化式

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

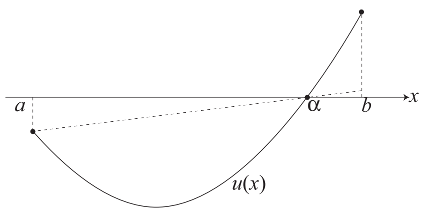
で定義される数列 $\{x_n\}$ は，α に収束することを示せ．

Point

有界な単調列は収束する (**実数の連続性公理**)

【解説】

(1) **中間値の定理**より，開区間 $(a,\ b)$ において，$u(x) = 0$ は解を持つ．

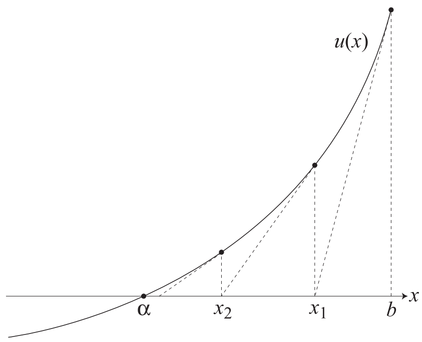


その解の 1 つを α とすれば，グラフの凸性により，

$$\begin{cases} u(x) < 0 & (a < x < \alpha) \\ u(x) > 0 & (\alpha < x < b) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

が成り立つので，α は区間内の唯一解である．

(2) 帰納法を用いて，$\{x_n\}$ が単調減少かつ下に有界であることを示す．



ある正整数 k に対して，$\alpha < x_k \leq b$ を仮定すると，

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} < x_k \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

また，$u''(x) > 0$ より，

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}) &= u(x_k) - \int_{x_{k+1}}^{x_k} u'(x)\,\mathbf{d}x \\ &> u(x_k) - u'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

ここで，

$$u(x) > 0 \iff \alpha < x \leq b \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

が成り立つので，

$$\alpha < x_{k+1} < x_k \leq b \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

更に，$x_1 = b$ であるから，帰納的に $\{x_n\}$ が単調減少かつ下に有界であることが示された．

有界な単調列は収束するから，$\{x_n\}$ は収束し，その収束極限を β とすれば，

$$\beta = \beta - \frac{u(\beta)}{u'(\beta)} \ \wedge\ \alpha \leq \beta \leq b \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

が成り立つから，

$$u(\beta) = 0 \ \wedge\ \alpha \leq \beta \leq b \iff \beta = \alpha \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

以上より，x_n が α に収束することが示された．

【Review 7.3.1】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する．

(1) $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示せ．

(2) $a_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}(a_n - \sqrt{2})^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示せ．

(3) $|a_5 - \sqrt{2}| < 10^{-10}$ を示せ．ただし，$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ である．

【Review 7.3.2】

Newton 近似法を用いて，

$$\sqrt[3]{2}\ (= 1.259921050\cdots\cdots)$$

の近似値を小数第 3 位まで求めよ．

【Example 7.4.1】 – 微分方程式の物理への応用 (単振動) –

バネ定数 $k(>0)$, 自然長からの変位を x とする**単振動**の運動方程式

$$m\frac{\mathbf{d}^2x}{\mathbf{d}t^2} = -kx \quad (m : \text{錘の質量}) \qquad \cdots\cdots(4.1.1)$$

の**一般解**は, 時刻 t の関数として,

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad (A,\ B : \text{定数})$$

で与えられる. ここで, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ は**角振動数 (角速度)** を表す.

【解説】

(4.1.1) を変数変換して,

$$\frac{\mathbf{d}^2x}{\mathbf{d}\tau^2} + x = 0 \quad \left(\tau = \omega t \ \wedge \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \qquad \cdots\cdots(4.1.2)$$

ここで, 関数 x が原点の周りで Taylor **展開**可能であるとして,

$$x = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \tau^r \qquad \cdots\cdots(4.1.3)$$

と表せば,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\tau} = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} r\, c_r \tau^{r-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}\tau^n & \cdots\cdots(4.1.4) \\ \dfrac{\mathbf{d}^2x}{\mathbf{d}\tau^2} = \displaystyle\sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)c_r \tau^{r-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}\tau^n & \cdots\cdots(4.1.5) \end{cases}$$

であるから, (4.1.3), (4.1.5) を (4.1.2) に代入して,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\}\tau^n = 0 \quad (\forall\tau,\ \forall n)$$

$$\iff c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)} \quad (\forall n \geq 0)$$

$$\iff \begin{cases} c_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}c_0 & (\forall n \geq 0) \\ c_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}c_1 & (\forall n \geq 0) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.1.6)$$

(4.1.6) を (4.1.3) に代入して,

$$x = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\tau^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\tau^{2n+1} = c_0\cos(\omega t) + c_1\sin(\omega t) \quad (\because\ \tau = \omega t) \qquad \cdots\cdots(4.1.7)$$

従って, 微分方程式 (4.1.1) の一般解が (4.1.7) の形で表されることが示せた.

次に, 初期条件

$$x\,|_{t=0} = x_0\,(>0) \ \wedge \ \left.\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\right|_{t=0} = 0 \qquad \cdots\cdots(4.4.8)$$

を与えて (4..4.1) の**特殊解**を求めてみる.

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) & \cdots\cdots(4.1.9) \\ \dfrac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) & \cdots\cdots(4.1.10) \end{cases}$$

の両式に $t = 0$ を代入して,

$$A = x_0 \ \wedge \ B = 0 \qquad \cdots\cdots(4.1.11)$$

(4.1.11) を (4.1.9) に代入して，特殊解

$$x = x_0\cos(\omega t) \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

を得る.

[Note]　初期条件 (4.1.8) は，時刻 $t = 0$ で自然長から $x_0\,(> 0)$ だけバネを伸ばしておき，(速度 0 で) 静かに手を放す操作を与えることを意味している.

【Review 7.4.1】　– エネルギー保存則 –

特殊解 (1.12) から次の関係式を導け.

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} : 定数) \qquad \cdots\cdots(4.1.13)$$

また，(4.1.13) 右辺の定数 $\mathbf{E}$ の値を求めよ.

【Review 7.4.2】

エネルギー保存則 (1.13) を利用して,

(1) 錘の速さが最大となるときの錘の位置を求めよ.　(2) 錘の速さが 0 となるときの錘の位置を求めよ.

ただし，初期条件は (1.8) に従うものとする.

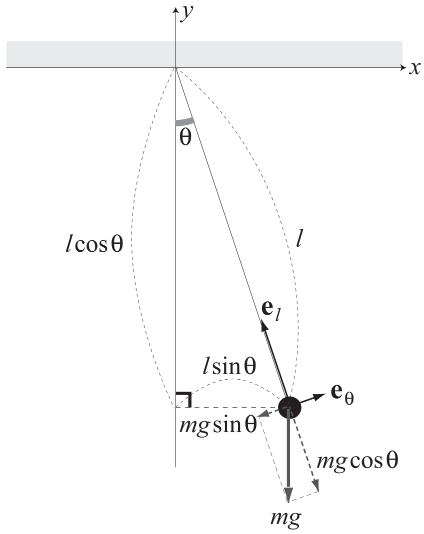
【Review 7.4.2】 – 微分方程式の物理への応用 (単振子) –

糸の長さ $l\,(>0)$, 重力定数 g の**単振子**の運動方程式は,

$$\frac{\mathbf{d}^2\theta}{\mathbf{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad \cdots\cdots(4.2.1)$$

で与えられる. ここで, $\theta\ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$ は鉛直方向と糸とのなす角を表す.

【解説】



右図より,

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l\sin\theta\\ -l\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2.2)$$

各成分を時間 t で微分して,

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} \dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\\ l\sin\theta\cdot\dot{\theta}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2.3)$$

ここで, $\mathbf{v}$ は速度ベクトル, $\dot{\theta}$ は時間 t による微分 $\dfrac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{d}t}$ を表す.
$\mathbf{v}$ の各成分を時間 t で微分して,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}=\begin{pmatrix} \ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} -l\sin\theta(\dot{\theta})^2+l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\\ l\cos\theta(\dot{\theta})^2+l\sin\theta\cdot\ddot{\theta}\end{pmatrix}\\ &=l(\dot{\theta})^2\begin{pmatrix} -\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+l\ddot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\ &=l(\dot{\theta})^2\,\mathbf{e}_l+l\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \qquad \cdots\cdots(4.2.4)\end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{e}_l=\begin{pmatrix} -\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2.5)$$

と表した.
錘に働く力 $m\mathbf{a}$ を $\mathbf{e}_l$ 方向成分と $\mathbf{e}_\theta$ 方向成分に分解して,

$$m\mathbf{a}=(T-mg\cos\theta)\mathbf{e}_l-mg\sin\theta\cdot\mathbf{e}_\theta \iff \begin{cases} T-mg\cos\theta=ml(\dot{\theta})^2 & \cdots\cdots(4.2.6)\\ -mg\sin\theta=ml\,\ddot{\theta} & \cdots\cdots(4.2.7)\end{cases}$$

(4.2.7) より,

$$\frac{\mathbf{d}^2\theta}{\mathbf{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad \cdots\cdots(4.2.1)$$

を得る.
二階微分方程式 (4.2.1) を解くには**楕円積分**という方法が必要だが,
θ が十分小さいとき, $\sin\theta$ を Taylor 展開して,

$$\sin\theta=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\simeq\theta \quad (|\theta|\ll 1) \qquad \cdots\cdots(4.2.8)$$

と近似できるので, 方程式 (4.2.1) を

$$\frac{\mathbf{d}^2\theta}{\mathbf{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad \cdots\cdots(2.4..9)$$

と近似して考えてよい.

前例題 [Example 7.4.1] の議論により，(4.2.9) の一般解は,

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \qquad \cdots\cdots(4.2.10)$$

と表示できる.

【Review 7.4.3】 – エネルギー保存則 –

微分方程式 (4.2.9) に従う運動における保存量 **E** を [Review 7.4.1] と同様の形式で求めよ.

【Review 7.4.4】

振子を時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ ($|\theta_0| \ll 1$) の位置から静かに離すとき，$\theta = 0$ の地点を通過するときの錘 (質点) の速さを求めよ.