【Example 11.1.1】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の等式を満たす.

$$\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}+6\mathbf{E}=\mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

このとき, $a+d$, $ad-bc$ の値を求めよ.

Point (Hamilton-Cayley **の定理**)

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\mathbf{M}^2-(a+d)\mathbf{M}+(ad-bc)\mathbf{E}=\mathbf{O}$$

以降,

$$a+d=\mathrm{trace}.\mathbf{M} \ \wedge \ ad-bc=\det.\mathbf{M}$$

なる記号 trace.$\mathbf{M}$, det.$\mathbf{M}$ を導入する.

【解説】

$a+d=\tau$, $ad-bc=\delta$ と表すとき, Hamilton-Cayley **の定理**により,

$$\mathbf{M}^2=\tau\mathbf{A}-\delta\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) を (1.1) に代入して,

$$\big(\tau\mathbf{M}-\delta\mathbf{E}\big)-5\mathbf{A}+6\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff (\tau-5)\mathbf{M}=(\delta-6)\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

• $\tau-5\neq 0$ の場合;

(1.3) の両辺を $\tau-5$ で割り, $\lambda=\dfrac{\delta-6}{\tau-5}$ と置くと,

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) を (1.1) に代入して,

$$(\lambda\mathbf{E})^2-5\lambda\mathbf{E}+6\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff \big(\lambda^2-5\lambda+6\big)\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff \lambda^2-5\lambda+6=0 \iff \lambda=2,\ 3 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5), (1.4) により,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \vee \ \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \iff (\tau,\ \delta)=(4,\ 4) \ \vee \ (\tau,\ \delta)=(6,\ 9) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

• $\tau-5=0$ の場合;

(1.3) の左辺は零行列となるので, 右辺も零行列となり,

$$\tau=5 \ \wedge \ \delta=6 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.6), (1.7) により,

$$(\tau,\ \delta)=(4,\ 4),\ (6,\ 9),\ (5,\ 6) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

ARISTOS

Comment

定理を使う際に陥りやすい誤りは,

$$\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} + 6\mathbf{E} = \mathbf{O} \iff \mathbf{M}^2 - (a+d)\mathbf{M} + (ad-bc)\mathbf{E} = \mathbf{O}$$

即ち,

$$(a+d,\ ad-bc) = (5,\ 6)$$

として，必要十分な形で解が求まらないことである.
Hamilton-Cayley **の定理**は,

$$\text{trace.}\mathbf{M} = \tau \ \wedge\ \text{det.}\mathbf{M} = \delta \implies \mathbf{M}^2 - \tau\mathbf{M} + \delta\mathbf{E} = \mathbf{O}$$

即ち，右方向の矢印のみ成り立ち，その逆は保証していない.

Point

Hamilton-Cayley **の定理は行列の次数を下げるための道具**

ARISTOS

【Example 11.1.2】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & d\end{pmatrix}$ が次の等式を満たす.

$$\mathbf{M}^3=\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

このとき, 実数 b, d の値を求めよ.

【解説】

題意の $\mathbf{M}$ に対して, 以下のように略記する.

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M}=4+d=\tau, \quad \mathrm{det}.\mathbf{M}=4d-3b=\delta$$

• $\delta\neq 0$ の場合;

(2.1) の両辺に $\mathbf{M}^{-1}$ を乗じて,

$$\mathbf{M}^2=\mathbf{E} \iff \tau\mathbf{M}-\delta\mathbf{E}=\mathbf{E} \quad \left(\because \text{Hamilton-Cayley}\right) \iff \tau\mathbf{M}=(\delta+1)\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

ここで, $\tau\neq 0$ を仮定すると,

$$\mathbf{M}=\frac{\delta+1}{\tau}\mathbf{E}=\frac{\delta+1}{\tau}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

となり, $\mathbf{M}$ の形に矛盾するので, $\tau=0 \wedge \delta+1=0$. 即ち,

$$4+d=0 \ \wedge \ 4d-3b+1=0 \iff d=-4 \ \wedge \ b=-5 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

• $\delta=0$ の場合;

Hamilton-Cayley **の定理**により,

$$\mathbf{M}^2=\tau\mathbf{M} \iff \mathbf{M}^3=\tau\mathbf{M}^2=\tau^2\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5), (2.1) により,

$$\begin{aligned}&\tau^2\mathbf{M}=\mathbf{M} \iff (\tau^2-1)\mathbf{M}=\mathbf{O}\\ &\iff \tau^2-1=0 \iff (4+d)^2-1=0 \iff d=-3 \ \vee \ d=-5 \qquad \cdots\cdots(2.6)\end{aligned}$$

ここで, $\delta=4d-3b=0$ より,

$$(d,\ b)=(-3,\ -4) \ \vee \ (d,\ b)=\left(-5,\ -\frac{20}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

以上, (2.4), (2.7) により,

$$(b,\ d)=(-5,\ -4),\ (-4,\ -3),\ \left(-\frac{20}{3},\ -5\right) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

[Note] (2.3) の形の行列 (単位行列の実数倍) を**スカラー行列**という.

ARISTOS

Comment

一般に，$\mathbf{M}$ がスカラー行列でないとき，

$$\text{trace.}\mathbf{M}=\tau \ \wedge \ \text{det.}\mathbf{M}=\delta \iff \mathbf{M}^2-\tau\mathbf{M}+\delta\mathbf{E}=\mathbf{O}$$

ここで，両方向の矢印が成り立っていることに注意してほしい．
即ち，Hamilton-Cayley **の定理**を用いる際には，$\mathbf{M}$ がスカラー行列であるか否かが本質的に重要である．

【Review 11.1】　96 大阪大

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を次の式で定義する．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を満たす行列 $\mathbf{A}$ を求めよ．　(2) $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}$ を満たす行列 $\mathbf{A}$ を求めよ．

ARISTOS

【Example 11.2】 90 東北大

2 次行列 $\mathbf{M}$ が次の各条件を満たす.

$$\begin{cases} \mathbf{M}^3+\mathbf{M}=\mathbf{E} & \cdots\cdots(2.1) \\ \mathbf{M}^3+\mathbf{M}=\mathbf{O} \ \wedge \ \mathbf{M}\neq\mathbf{O} & \cdots\cdots(2.2) \\ \mathbf{M}^3+\mathbf{M}^2+\mathbf{M}=\mathbf{O} \ \wedge \ \mathbf{M}\neq\mathbf{O} & \cdots\cdots(2.3) \end{cases}$$

それぞれの場合について, $\mathbf{M}$ の逆行列の存在を示し, その逆行列を求めよ.

Point (逆行列の定義)

行列 $\mathbf{M}$ に対して,

$$\mathbf{M}\mathbf{X}=\mathbf{E} \ \wedge \ \mathbf{X}\mathbf{M}=\mathbf{E}$$

を満たす行列 $\mathbf{X}$ を $\mathbf{M}$ の逆行列といい, $\mathbf{M}^{-1}$ と表す.

【解説】

• (2.1) の場合;

$$\mathbf{M}^3+\mathbf{M}=\mathbf{E} \iff \mathbf{M}\left(\mathbf{M}^2+\mathbf{E}\right)=\left(\mathbf{M}^2+\mathbf{E}\right)\mathbf{M}=\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

逆行列の定義により,

$$\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}^2+\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

• (2.2) の場合;

det.$\mathbf{M}=0$ を仮定するとき, Hamilton-Cayley **の定理**により,

$$\mathbf{M}^2=\tau\mathbf{M} \quad \left(\tau=\mathrm{trace}.\mathbf{M}\right) \iff \mathbf{M}^3=\tau\mathbf{M}^2=\tau^2\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) を (2.2) に代入して,

$$\tau^2\mathbf{M}+\mathbf{M}=\mathbf{O} \iff (\tau^2+1)\mathbf{M}=\mathbf{O} \iff \tau^2+1=0 \quad \left(\because \ \mathbf{M}\neq\mathbf{O}\right) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

これは τ が実数であることに矛盾するので,

$$\mathrm{det}.\mathbf{M}\neq 0 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

このとき, $\mathbf{M}^{-1}$が存在するので, これを (2.2) の両辺に繰り返し乗じて,

$$\mathbf{M}^2+\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff \mathbf{M}+\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{O} \iff \mathbf{M}^{-1}=-\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

• (2.3) の場合;

det.$\mathbf{M}=0$ を仮定するとき, (2.6) を (2.3) に代入して,

$$\left(\tau^2+\tau+1\right)\mathbf{M}=\mathbf{O} \iff \tau^2+\tau+1=0 \quad \left(\because \ \mathbf{M}\neq\mathbf{O}\right) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

これは τ が実数であることに矛盾するので, det.$\mathbf{M}\neq 0$ が導かれる.

このとき, $\mathbf{M}^{-1}$が存在するので, これを (2.3) の両辺に繰り返し乗じて,

$$\mathbf{M}^2+\mathbf{M}+\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff \mathbf{M}+\mathbf{E}+\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{O} \iff \mathbf{M}^{-1}=-(\mathbf{M}+\mathbf{E}) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

ARISTOS

Comment

前の例題では，Hamilton-Cayley **の定理**が行列の次数を下げる手段であることを説明した．
本例題の主張は，

逆行列を用いれば，行列の多項式をより低次の多項式に変形できる

ことであり，即ち，逆行列も行列の次数を下げる手段の一つである．
例えば，Hamilton-Cayley **の定理**に逆行列を乗じて，

$$\mathbf{M}^2-\tau\mathbf{M}+\delta\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff \mathbf{M}-\tau\mathbf{E}+\delta\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{O}$$

$$\iff \mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{\delta}(-\mathbf{M}+\tau\mathbf{E}) \quad \left(\because\ \tau=\mathrm{trace}.\mathbf{M},\ \delta=\det.\mathbf{M}\neq 0\right)$$

ここで，$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と成分表示すれば，

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\left\{\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}+(a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

即ち，逆行列を用いることと Hamilton-Cayley **の定理**を用いることは本質的に同値である．

Point

行列の次数を下げるには，

Hamilton-Cayley **の定理** または **逆行列**

を利用する．

【**Review 11.2**】

2 次行列 $\mathbf{M}$ が $\mathbf{M}^2-\mathbf{M}+\mathbf{E}=\mathbf{O}$ を満たすとき，

(1) $\mathbf{M}$ の逆行列が存在することを示し，それを求めよ．

(2) $\mathbf{M}-\mathbf{M}^{-1}$ の逆行列が存在することを示し，それを求めよ．

ARISTOS

【Example 11.3.1】

正整数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1.1)$$

が成り立つことを帰納法を用いて示せ.

【解説】

ある正整数 n に対して, (3.1.1) を仮定するとき,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1.2)$$

また, $n=1$ のときの成立は明らかなので, 帰納的にすべての正整数 n について (3.1.1) は成立.

【Example 11.3.2】

正整数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 0 & w_n \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2.1)$$

を満たす x_n, y_n, w_n を a, b, d を用いて表せ.

【解説】

ある正整数 n に対して, (3.2.1) を仮定するとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 0 & w_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n & bx_n+dy_n \\ 0 & dw_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ 0 & w_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2.2)$$

(3.2.1), (3.2.2) より, 次の関係式が導かれる.

$$\begin{cases} x_1 = a,\ x_{n+1} = a\,x_n & \cdots\cdots(3.2.3) \\ w_1 = d,\ w_{n+1} = d\,w_n & \cdots\cdots(3.2.4) \\ y_1 = b,\ y_{n+1} = bx_n + d\,y_n & \cdots\cdots(3.2.5) \end{cases}$$

このとき, (3.2.3), (3.2.4) により,

$$x_n = a^n \ \wedge\ w_n = d^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.2.6)$$

次に, $\{y_n\}$ の一般項を求める.

● $d \neq 0$ のとき, (3.2.5) の両辺を d^{n+1} で割って,

$$\frac{y_{n+1}}{d^{n+1}} - \frac{y_n}{d^n} = \frac{b}{d}\left(\frac{a}{d}\right)^n \quad (\because\ x_n = a^n) \qquad \cdots\cdots(3.2..7)$$

$\star$ $a \neq d$ のとき,

$$\frac{y_n}{d^n} = \frac{y_1}{d} + \frac{b}{d}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a}{d}\right)^k = \frac{b}{d}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{d}\right)^k = \frac{b}{d}\,\frac{\left(1-(a/d)^n\right)}{1-(a/d)} = \frac{b\left(1-(a/d)^n\right)}{d-a} \quad (\because\ y_1 = b) \qquad \cdots\cdots(3.2.8)$$

(3.2.8) の両辺に d^n を乗じて,

$$y_n = \frac{b\left(d^n - a^n\right)}{d-a} \qquad \cdots\cdots(3.2.9)$$

ARISTOS

⋆ $a=d$ のとき，

$$\frac{y_n}{d^n}=\frac{y_1}{d}+(n-1)\frac{b}{d}=\frac{b}{d}n \quad \left(\because\ y_1=b\right) \iff y_n=bn\cdot d^{n-1}=bn\cdot a^{n-1} \quad \left(\because\ a=d\right) \qquad \cdots\cdots(3.2.10)$$

• $d=0$ のとき，(3.2.5) より，

$$y_n=bx_{n-1}=b\cdot a^{n-1} \qquad \cdots\cdots(3.2.11)$$

これは (3.2.9) において，$d=0$ とした式と一致する．

(3.2.6), (3.2.9), (3.2.10) により，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & \dfrac{b(d^n-a^n)}{d-a}\\ 0 & d^n\end{pmatrix}\ (a\neq d)\ \vee\ \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & bn\cdot a^{n-1}\\ 0 & a^n\end{pmatrix}\ (a=d) \qquad \cdots\cdots(3.2.12)$$

Point

対角行列 : $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$，　上三角行列 : $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$，　下三角行列 : $\begin{pmatrix}a & 0\\ c & d\end{pmatrix}$

の n 乗は帰納的に定義する．

【Review 11.3】　93 学芸大

n を正整数とする．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}$$

に対して，$\mathbf{M}^n$ を求めよ．

ARISTOS

【Example 11.4】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{M}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ を満たす実数 λ の値と，その値に対応するベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ に対して，$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ を求めよ．

(3) 正整数 n に対して，$\mathbf{M}^n$ を求めよ．

Point

行列 $\mathbf{M}$ を対角型行列に変形することにより，$\mathbf{M}^n$ を求める

Theorem

$x,\ y$ の連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=0 & \cdots\cdots(1)\\ cx+dy=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases} \iff \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

が $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ なる解 (**非自明解**) を持つための必要十分条件は，

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} \iff \mathrm{det.}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=0 \iff ad-bc=0$$

Comment

平面上で (1) の表す直線と (2) の表す直線は，いずれも原点を通るので，2 直線の傾きが異なるときは交点は原点のみである．特に，(1), (2) の傾きが一致するとき，2 直線は重なり合って 1 本の直線を表す．このとき，連立方程式 (1), (2) の解 $(x,\ y)$ は，重なった 1 本の直線上に無数に分布し，不定解 $(x,\ y)=k(b,\ -a)\ (k\neq 0)$ を持つ．これが連立方程式 (1), (2) の**非自明解**である．

[Note]

2 次行列 $\mathbf{M}$ とベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\mathbf{M}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\ \wedge\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}$$

を満たす実数 λ を $\mathbf{M}$ の**固有値**，λ の値に対応するベクトル $\mathbf{x}$ を**固有ベクトル**という．
上の定理により，$\mathbf{M}$ の固有値 λ は，

$$\mathrm{det.}\big(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{E}\big)=0 \iff \lambda^2-\tau\lambda+\delta=0 \quad \big(\tau=\mathrm{trace.}\mathbf{M},\ \delta=\mathrm{det.}\mathbf{M}\big)$$

なる方程式 (**固有方程式**) の実数解である．

ARISTOS

【解説】

(1) trace.$\mathbf{M}=7$, det.$\mathbf{M}=12$ により，固有方程式は,

$$\lambda^2-7\lambda+12=0 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

即ち，$\mathbf{M}$ の固有値は 3, 4 である.

● $\lambda_1=3$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ は,

$$\left(\mathbf{M}-3\mathbf{E}\right)\mathbf{x}_1=\mathbf{0} \iff \begin{pmatrix}-2 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff 2x_1+3y_1=0 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

このとき，固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ は,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix} \quad (s\neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

● $\lambda_2=4$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_2$ は,

$$\left(\mathbf{M}-4\mathbf{E}\right)\mathbf{x}_1=\mathbf{0} \iff \begin{pmatrix}-3 & -3\\ 2 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff x_1+y_1=0 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

このとき，固有ベクトル $\mathbf{x}_2$ は,

$$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \quad (t\neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(2) (1) で求めた固有値，固有ベクトルを用いて,

$$\mathbf{P}=\left(\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\right)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s & t\\ -2s & -t\end{pmatrix} \quad (st\neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

と定義すれば,

$$\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{st}\begin{pmatrix}t & t\\ -2s & -3s\end{pmatrix} \quad (st\neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

このとき,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}=\frac{1}{st}\begin{pmatrix}t & t\\ -2s & -3s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3s & t\\ -2s & -t\end{pmatrix}=\frac{1}{st}\begin{pmatrix}3st & 0\\ 0 & 4st\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(3) 正整数 n に対して,

$$\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)^n=\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\times\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\times\cdots\times\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^n\mathbf{P} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

一方,

$$\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)^n=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.9), (4.10) より，$\mathbf{M}^n$ について解いて,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^n&=\begin{pmatrix}3s & t\\ -2s & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}\frac{1}{st}\begin{pmatrix}t & t\\ -2s & -3s\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{st}\begin{pmatrix}3st\cdot 3^n-2st\cdot 4^n & 3st\cdot 3^n-3st\cdot 4^n\\ -2st\cdot 3^n+2st\cdot 4^n & -2st\cdot 3^n+3st\cdot 4^n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3\cdot 3^n-2\cdot 4^n & 3\cdot\left(3^n-4^n\right)\\ -2\cdot 3^n+2\cdot 4^n & -2\cdot 3^n+3\cdot 4^n\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.11)\end{aligned}$$

ARISTOS

[Note]

計算過程を見れば明らかであるが，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$, $\mathbf{M}^n$ の成分は s, t の値に依らない．
即ち，対角行列を導く $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{-1}$ は次のように選べばよい．

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (\because\ s = t = 1)$$

Comment

行列の冪乗計算には数種類の方法があるが，その中でも本例題の「対角化による冪乗計算」は一番手間がかかる．この計算法が入試における頻出問題となっている理由は，大学教養課程で学ぶ**線形代数学**の基礎となっているからである．しかしながら，一連の計算が持つ数学的意味を知らなくても，計算の手続きさえ覚えてしまえば得点源となるタイプの問題でもある．

【Review 11.4】　92 早稲田

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

$$ad - bc = 1 \ \wedge\ a > 0$$

を満たす整数 a, b, c, d を成分とする行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を適当に選ぶとき，

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，x, y の値を求め，$\mathbf{M}^n$ の成分を求めよ．

ARISTOS