【Example 12.1.1】

2 次行列 $\mathbf{M}$ に対して，

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

となるための必要十分条件は，

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M} = \mathrm{det}.\mathbf{M} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

であることを示せ．

Point (行列式の性質)

- $\mathrm{det}.(\mathbf{MN}) = \mathrm{det}.\mathbf{M} \times \mathrm{det}.\mathbf{N}$
- $\mathrm{det}.(\mathbf{M}^n) = (\mathrm{det}.\mathbf{M})^n$ (n : 正整数)
- $\mathrm{det}.(\mathbf{M}^{-1}) = (\mathrm{det}.\mathbf{M})^{-1}$

【解説】

$\mathrm{trace}.\mathbf{M} = \tau$, $\mathrm{det}.\mathbf{M} = \delta$ と表す．

Hamilton-Cayley **の定理**より，(1.1.2) $\Longrightarrow$ (1.1.1) の成立は明らか．即ち，

$\tau = \delta = 0$ のとき，

$$\mathbf{M}^2 = \tau\mathbf{M} - \delta\mathbf{E} = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

(1.1.3) の両辺に $\mathbf{M}$ を $n-2$ 回乗じて，

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

次に，(1.1.1) $\Longrightarrow$ (1.1.2) の成立を示す．

(1.1.1) 両辺の行列式の値を比較して，

$$\mathrm{det}.(\mathbf{M}^n) = \mathrm{det}.\mathbf{O} = 0 \iff \delta^n = 0 \iff \delta = 0 \qquad \cdots\cdots(1.1.4)$$

このとき，Hamilton-Cayley **の定理**により，

$$\mathbf{M}^2 = \tau\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(1.1.5)$$

従って，

$$\mathbf{M}^n = \tau\mathbf{M}^{n-1} = \tau^2\mathbf{M}^{n-2} = \cdots = \tau^{n-1}\mathbf{M} \qquad \cdots\cdots(1.1.6)$$

(1.1.6), (1.1.1) により，

$$\tau^{n-1}\mathbf{M} = \mathbf{O} \iff \tau = 0 \quad (\because\ \mathbf{M} \neq \mathbf{O}) \qquad \cdots\cdots(1.1.7)$$

(1.1.4), (1.1.7) により，

$$\mathrm{trace}.\mathbf{M} = \mathrm{det}.\mathbf{M} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

[問] 行列式の性質を用いて，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

のとき，$\mathrm{det}.(\mathbf{M}^6 + \mathbf{M}^5)$ を計算せよ．

Comment

$\mathbf{M} \neq \mathbf{O}$ に対して，$\mathbf{M}^n = \mathbf{O}$ $(n \geq 2)$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ を**冪零行列**という．即ち，
例題は 2 次行列が冪零行列となるための必要十分条件を求める問題である．
trace.$\mathbf{M}$ = det.$\mathbf{M} = 0$ であるような行列は，例えば，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，このような例は簡単に作ることができる．
更に，$\mathbf{M}^2 = \mathbf{O}$ を満たす行列は $\mathbf{M} = \mathbf{O}$ に限らないことも意味しており，
この事実を一般化すれば，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{O} \implies \mathbf{A} = \mathbf{O} \ \vee \ \mathbf{B} = \mathbf{O}$$

の論法が成り立たないことを意味している．
ここで，

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{O} \ \wedge \ \mathbf{B} \neq \mathbf{O} \ \wedge \ \mathbf{AB} = \mathbf{O}$$

を満たす $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を**零因子**という．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，これらの行列は零因子である．

【Review 12.1】

2 次行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が次の条件を満たす．

$$\begin{cases} \mathbf{A} \neq \mathbf{O},\ \mathbf{B} \neq \mathbf{O},\ \mathbf{A} \neq \mathbf{E},\ \mathbf{B} \neq \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A},\ \mathbf{B}^2 = \mathbf{B},\ \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{O} \end{cases}$$

(1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ が成り立つことを示せ．　(2) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を求めよ．

【Example 12.1.2】 98 慶応義塾

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

を満たす $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は存在するか否か.

Point (**トレースの性質**)

- trace.$(\mathbf{M}\mathbf{N})=$ trace.$(\mathbf{N}\mathbf{M})$ (**可換性**)
- trace.$(\lambda\mathbf{M}+\mu\mathbf{N})=\lambda$ trace.$\mathbf{M}+\mu$ trace.$\mathbf{N}$ (**線形性**)

【解説】

$\mathbf{AB}=\mathbf{M}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{N}$ と表せば, (1.2.1) より,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

このとき,

$$\begin{cases} \text{trace.}\mathbf{M}=2 \wedge \text{det.}\mathbf{M}=1 \\ \text{trace.}\mathbf{N}=1 \wedge \text{det.}\mathbf{N}=1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

により,

$$\text{det.}\mathbf{M}=\text{det.}\mathbf{N} \ \wedge \ \text{trace.}\mathbf{M}\neq\text{trace.}\mathbf{N} \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

一方,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$

により,

$$\begin{aligned} \text{trace.}(\mathbf{AB}) &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \\ &= (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})=\text{trace.}(\mathbf{BA}) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

即ち,

$$\text{trace.}\mathbf{M}=\text{trace.}\mathbf{N} \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

以上において, (1.2.4), (1.2.7) は矛盾するので, (1.2.1) を満たす $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は存在しない.

Point

定行列の determinant, trace の値から条件を導く

【Example 12.2】　89 弘前大

2 次行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ に対して，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

が成り立つとき，適当な実数 λ, μ が存在して，

$$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

と表されることを示せ．ただし，$\mathbf{A}$ スカラー行列でないとする．

Definition

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が**一次従属**であるとは，適当な実数 λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 を用いて，

$$\mathbf{B}=\lambda_1\mathbf{A}+\mu_1\mathbf{E} \ \vee\ \mathbf{A}=\lambda_2\mathbf{B}+\mu_2\mathbf{E}$$

と表せることである．

【解説】

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とする．

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix},\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

の各成分を比較して，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA} \iff \begin{cases} bz=cy & \cdots\cdots(2.4) \\ ay+bw=bx+dy & \cdots\cdots(2.5) \\ cx+dz=az+cw & \cdots\cdots(2.6) \end{cases}$$

(2.5), (2.6) より，

$$(a-d)y=b(x-w) \ \wedge\ (a-d)z=c(x-w) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

● $a-d\neq 0$ の場合;

(2.7) より，

$$y=\frac{b}{a-d}(x-w) \ \wedge\ z=\frac{c}{a-d}(x-w) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) を $\mathbf{B}$ の成分に代入して，

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x & \dfrac{b}{a-d}(x-w) \\ \dfrac{c}{a-d}(x-w) & w \end{bmatrix}$$

$$=\frac{x-w}{a-d}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\frac{aw-dx}{a-d}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{x-w}{a-d}\mathbf{A}+\frac{aw-dx}{a-d}\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

ここで，

$$\lambda=\frac{x-w}{a-d},\quad \mu=\frac{aw-dx}{a-d} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

と書き換えれば，

$$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

• $a-d=0$ の場合;

(2.4) において，$b=c=0$ とすれば,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=a\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

これは $\mathbf{A}$ がスカラー行列でないという題意に矛盾する.

このとき，b, c の少なくとも一方は 0 でないので，(2.7) より,

$$b(x-w)=0 \ \wedge\ c(x-w)=0 \quad \bigl(\because\ a=d\bigr) \implies x=w \quad \bigl(b\neq 0 \vee c\neq 0\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

$\star\, b\neq 0$ の場合;

(2.4) より，$z=cy/b$ と表せるから,

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&y\\\dfrac{cy}{b}&0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\frac{y}{b}\begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix}+\left(x-\frac{a}{b}y\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{y}{b}\mathbf{A}+\left(x-\frac{a}{b}y\right)\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

ここで,

$$\lambda=\frac{y}{b},\quad \mu=x-\frac{a}{b}y \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

と書き換えれば,

$$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

$\star\, b=0$ の場合;

$c\neq 0$ としてよいので，同様の計算により,

$$\mathbf{B}=\frac{z}{c}\mathbf{A}+\left(x-\frac{a}{c}z\right)\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

ここで,

$$\lambda=\frac{z}{c},\quad \mu=x-\frac{a}{c}z \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

と書き換えれば,

$$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

以上の議論により，(2.1) より (2.2) が導かれた.

Comment

冪乗計算を除く行列計算において，これまで成分による計算を最小限に留め，行列単位の計算で効率化を図る工夫をしてきた．この計算技術は必ずしもすべての行列計算について可能な訳ではない．問題によっては成分ごとの計算が不可避なものもある．その象徴的な例として本例題を挙げた．例題の証明は場合分けを含めてかなり煩雑であるが得られる結果は極めて有用である．即ち,

積についての交換可能性 (可換性) と一次従属性は同値

であるという事実である．証明は (2.1) ⇒ (2.2) の形の命題であるが，(2.2) ⇒ (2.1) は明らかに成り立つ.

一般には，$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ であるが，$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ が成り立つとき，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は**積について交換可能 (可換)** であるという.

【Review 12.2】　88 東京女子大

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA} \ \wedge\ \mathbf{B}^2=\mathbf{B}$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{B}$ をすべて求めよ.

【Example 12.3.1】　94 お茶の水大

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{cases}\mathbf{M}=3\mathbf{P}_1+4\mathbf{P}_2\\ \mathbf{E}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\end{cases}\qquad\cdots\cdots(3.1.1)$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ を考える．

(1) $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ を求めよ．　(2) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ を求めよ．　(3) $\mathbf{M}^n=3^n\mathbf{P}_1+4^n\mathbf{P}_2$ を示せ．

Point (直和分解による冪乗計算)

2 次行列 $\mathbf{M}$ の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ に対して，

$$\mathbf{M}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2\ \wedge\ \mathbf{E}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\qquad\cdots\cdots(3.1.2)$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ が存在して，

$$\mathbf{M}^n=\lambda_1{}^n\mathbf{P}_1+\lambda_2{}^n\mathbf{P}_2\qquad\cdots\cdots(3.1.3)$$

が成り立つ．(3.1.3) を $\mathbf{M}$ の**直和分解**または**スペクトル分解**という．

$\mathbf{M}$ の直和分解が冪乗計算にどのように作用するか見てみよう．

連立方程式 (3.1.2) を解いて，

$$\mathbf{P}_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{E}),\quad \mathbf{P}_2=-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{E})\qquad\cdots\cdots(3.1.4)$$

このとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2&=-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{E})\\ &=-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left(\mathbf{M}^2-(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{M}+\lambda_1\lambda_2\mathbf{E}\right)=\mathbf{O}\quad(\because\ \text{Hamilton-Cayley})\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(3.1.5)$$

同様の計算により，$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{O}$ も導けるので，

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{O}\qquad\cdots\cdots(3.1.6)$$

即ち，$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ は**可換**であるので，

$$\mathbf{M}^n=(\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(\lambda_1\mathbf{P}_1)^{n-k}(\lambda_2\mathbf{P}_2)^k\qquad\cdots\cdots(3.1.7)$$

ここで，$\mathbf{P}_1{}^0=\mathbf{P}_2{}^0=\mathbf{E}$ とする．

(3.1.7) の右辺を展開して，

$${}_n\mathrm{C}_0\,\lambda_1{}^n\mathbf{P}_1{}^n+{}_n\mathrm{C}_1\,\lambda_1{}^{n-1}\lambda_2\mathbf{P}_1{}^{n-1}\mathbf{P}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,\lambda_1\lambda_2{}^{n-1}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2{}^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\,\lambda_2{}^n\mathbf{P}_2{}^n\qquad\cdots\cdots(3.1.8)$$

(3.1.8) の第 2 項目から第 n 項目までは積 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ を含むので，すべて零行列となる．

$$\therefore\ \mathbf{M}^n=\lambda_1{}^n\mathbf{P}_1{}^n+\lambda_2{}^n\mathbf{P}_2{}^n\qquad\cdots\cdots(3.1.9)$$

更に,

$$\begin{cases} \mathrm{trace}.\mathbf{P}_1 = \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big(\mathrm{trace}.\mathbf{M}-\lambda_2\,\mathrm{trace}.\mathbf{E}\big) = \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big((\lambda_1+\lambda_2)-2\lambda_2\big) = 1 \\ \mathrm{det}.\mathbf{P}_1 = \dfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\big(\mathrm{det}.(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{E})\big) = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(3.1.10)$$

このとき, $\mathbf{P}_1$ に Hamilton-Cayley **の定理**を用いて,

$$\mathbf{P}_1{}^2 = \mathbf{P}_1 \quad \cdots\cdots(3.1.11)$$

即ち, $\mathbf{P}_1$ は**冪等行列**であり,

$$\mathbf{P}_1{}^n = \mathbf{P}_1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots\cdots(3.1.12)$$

同様の計算により,

$$\mathbf{P}_2{}^n = \mathbf{P}_2 \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots\cdots(3.1.13)$$

(3.1.9), (3.1.14), (3.1.15) により,

$$\mathbf{M}^n = \lambda_1{}^n\,\mathbf{P}_1 + \lambda_2{}^n\,\mathbf{P}_2 \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots\cdots(3.1.14)$$

【解説】

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値は,

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \iff \lambda = 3 \vee \lambda = 4$$

このとき,

$$\mathbf{M} = 3\mathbf{P}_1 + 4\mathbf{P}_2 \ \wedge\ \mathbf{E} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$

により,

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 = 4\mathbf{E} - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_2 = \mathbf{M} - 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

このとき, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ に対して,

$$\big(\mathrm{trace}.\mathbf{P}_1 = 1 \ \wedge\ \mathrm{det}.\mathbf{P}_1 = 0\big) \ \wedge\ \big(\mathrm{trace}.\mathbf{P}_2 = 1 \ \wedge\ \mathrm{det}.\mathbf{P}_2 = 0\big)$$

より, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ は**冪等行列**であり,

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (4\mathbf{E}-\mathbf{M})(\mathbf{M}-3\mathbf{E}) = -(\mathbf{M}^2 - 7\mathbf{M} + 12\mathbf{E}) = \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = (\mathbf{M}-3\mathbf{E})(4\mathbf{E}-\mathbf{M}) = -(\mathbf{M}^2 - 7\mathbf{M} + 12\mathbf{E}) = \mathbf{O} \end{cases}$$

より, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ は**零因子**であるので,

$$\mathbf{M}^n = \big(3\mathbf{P}_1 + 4\mathbf{P}_2\big)^n = 3^n\,\mathbf{P}_1 + 4^n\,\mathbf{P}_2 = 3^n\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + 4^n\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2\cdot 4^n & 3(3^n - 4^n) \\ 2(4^n - 3^n) & -2\cdot 3^n + 3\cdot 4^n \end{pmatrix}$$

[Note] 計算効率だけを考えれば, 直和分解による冪乗計算の方が対角化よりも遥かに効率的である.

【Eaxample 12.3.2】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ に対して，$\mathbf{M}^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ.

Point (直和分解による冪乗計算)

2 次行列 $\mathbf{M}$ の固有方程式の解が重根 λ_0 のとき，

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(3.2.1)$$

で定まる行列 $\mathbf{N}$ は**冪零行列**であるので，

$$\mathbf{M}^n=(\mathbf{N}+\lambda_0\mathbf{E})^n=n\,{\lambda_0}^{n-1}\mathbf{N}+{\lambda_0}^n\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(3.2.2)$$

$\mathbf{M}$ の固有方程式における解と係数の関係により，

$$\text{trace.}\mathbf{M}=2\lambda_0 \ \wedge\ \det.\mathbf{M}={\lambda_0}^2 \qquad \cdots\cdots(3.2.3)$$

このとき，Hamilton-Cayley **の定理**により，

$$\mathbf{M}^2-2\lambda_0\mathbf{M}+{\lambda_0}^2\mathbf{E}=\mathbf{O} \iff (\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E})^2=\mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(3.2.4)$$

ここで，$\mathbf{N}=\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E}$ によって $\mathbf{N}$ を定めると，

$$\mathbf{N}^2=(\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E})^2=\mathbf{O} \quad \big(\because\ (3.2.4)\big) \qquad \cdots\cdots(3.2.5)$$

即ち，$\mathbf{N}$ は**冪零行列**となり，

$$\mathbf{N}\neq\mathbf{O} \ \wedge\ \mathbf{N}^n=\mathbf{O} \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad \cdots\cdots(3.2.6)$$

従って，

$$\mathbf{M}^n=(\mathbf{N}+\lambda_0\mathbf{E})^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,\mathbf{N}^{n-k}(\lambda_0\mathbf{E})^k=n\,{\lambda_0}^{n-1}\mathbf{N}+{\lambda_0}^n\mathbf{E} \qquad \cdots\cdots(3.2.7)$$

【解説】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ より，

$$\text{trace.}\mathbf{M}=2 \ \wedge\ \det.\mathbf{M}=1 \qquad \cdots\cdots(3.2.8)$$

このとき，$\mathbf{M}$ の固有方程式は，

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \iff \lambda=1\ (\textbf{重根}) \qquad \cdots\cdots(3.2.9)$$

そこで，行列 $\mathbf{N}$ を次のように定める.

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2.10)$$

このとき，$\text{trace.}\mathbf{N}=\det.\mathbf{N}=0$ であるから，$\mathbf{N}$ は**冪零行列**である.

$$\therefore\ \mathbf{M}^n=(\mathbf{N}+\mathbf{E})^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,\mathbf{N}^{n-k}\mathbf{E}^k=n\mathbf{N}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1+2n & 2n\\ -2n & 1-2n\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2.11)$$

【Review 12.3】 2007 東大

(1) 実数 a に対して，2 次行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ が次の条件

$$\mathbf{M}=a\mathbf{P}+(a+1)\mathbf{Q} \ \wedge \ \mathbf{P}^2=\mathbf{P} \ \wedge \ \mathbf{Q}^2=\mathbf{Q} \ \wedge \ \mathbf{PQ}=\mathbf{QP}=\mathbf{O}$$

を満たすとき，$\left(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)\mathbf{M}=\mathbf{M}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbf{O}$ は零行列である．

(2) 実数 $a>0$ に対して，次の行列 $\mathbf{M}$ を考える．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

このとき，(1) の条件をすべて満たす行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ を求めよ．

(3) 整数 $n\geq 2$ に対して，$2\leq k\leq n$ を満たす整数 k により，

$$\mathbf{M}_k=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

と定義するとき，行列の積 $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\mathbf{M}_k$ を求めよ．

【Example 12.4】

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ に対して,

(1) 固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1<\lambda_2)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対して,

$$x^n=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\mathrm{P}(x)+a_nx+b_n \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

を満たす数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を求めよ. ここで, $\mathrm{P}(x)$ は x の $n-2$ 次の整式を表す.

(3) $\mathbf{M}^n=a_n\mathbf{M}+b_n\mathbf{E}$ と表せることを示し, $\mathbf{M}^n\ (n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ.

Point

整関数の**剰余定理を利用**して, 行列の冪乗を計算する

【解説】

(1) trace.$\mathbf{M}=7$, det.$\mathbf{M}=12$ より,

$$\lambda^2-7\lambda+12=0 \iff \lambda=3,\ 4 \qquad \therefore\ \lambda_1=3,\ \lambda_2=4 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(2) (4.1) に対して, $x=3,\ 4$ を代入して,

$$3a_n+b_n=3^n\ \wedge\ 4a_n+b_n=4^n \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) を $a_n,\ b_n$ について解き,

$$a_n=4^n-3^n\ \wedge\ b_n=4\cdot 3^n-3\cdot 4^n \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(3) (4.1) の多項式 P を用いて,

$$\mathbf{M}^n=(\mathbf{M}-3\mathbf{E})(\mathbf{M}-4\mathbf{E})\,\mathrm{P}(\mathbf{M})+a_n\mathbf{M}+b_n\mathbf{E}=a_n\mathbf{M}+b_n\mathbf{E}\quad\left(\because\ \mathbf{M}^2-7\mathbf{M}+12\mathbf{E}=\mathbf{O}\right) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathbf{M}^n=a_n\mathbf{M}+b_n\mathbf{E}&=(4^n-3^n)\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}+(4\cdot 3^n-3\cdot 4^n)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2\cdot 4^n & 3(3^n-4^n)\\ 2(4^n-3^n) & -2\cdot 3^n+3\cdot 4^n\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.6)\end{aligned}$$

Comment

行列の冪乗計算に関する 4 通りの計算法を示してきたので, それらを整理しておく.

- $\mathbf{M}^n$ を帰納的に定義する方法 ⟹ 上三角行列, 下三角行列に対して有効
- 対角化による方法 ⟹ 誘導形式で出題される場合に用いる
- 直和分解による方法
- 剰余定理を利用する方法

（直和分解による方法・剰余定理を利用する方法） ⟹ 計算法が指定されないときは, この方法が効率的

いずれの場合の計算も固有値とその個数が解法の鍵となる.