【Example 13.1】

(1) 2 次曲線

$$\mathfrak{C} : Ax^2 + By^2 = 1 \quad (AB \neq 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

上の点 P(x_0, y_0) における接線の方程式は,

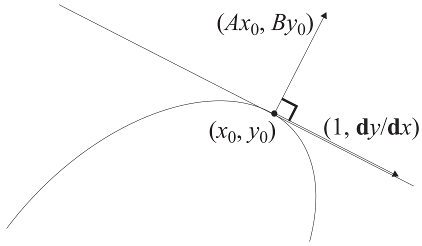
$$Ax_0x + By_0y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

で与えられることを示せ.

(2) $\mathfrak{C}$ 上にない点 P(x_0, y_0) から 2 本の接線を引き，その接点を Q, R とする.
このとき，直線 QR の方程式を求めよ.

【解説】

(1) (1.1) の両辺を x で微分して,



$$2Ax + 2By \times \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

これに $(x, y) = (x_0, y_0)$ を代入して,

$$Ax_0 + By_0 \times \left.\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right|_{(x_0, y_0)} = 0 \iff \begin{pmatrix} Ax_0 \\ By_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{d}y/\mathbf{d}x \end{pmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

ここで，$(1, \mathbf{d}y/\mathbf{d}x)$ は点 P(x_0, y_0) における接ベクトルを表すので,
これに垂直な (Ax_0, By_0) は法線方向のベクトルを表す．即ち，接線上の点 (x, y) に対して,

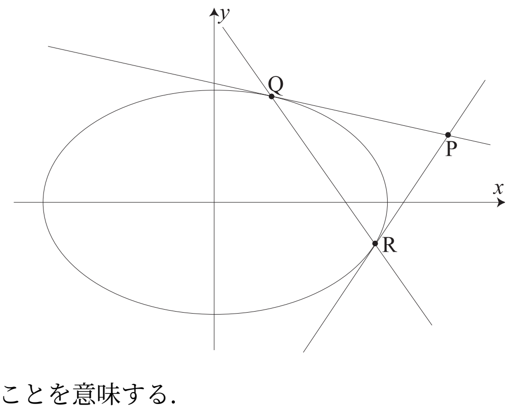
$$\begin{pmatrix} Ax_0 \\ By_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \iff Ax_0(x - x_0) + By_0(y - y_0) = 0$$

$$\iff Ax_0x + By_0y = 1 \quad \left(\because Ax_0{}^2 + By_0{}^2 = 1\right) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

従って，求める接線の方程式は,

$$Ax_0x + By_0y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(2) 接点 Q, R の座標を (x_1, y_1), (x_2, y_2) と表す.
(1) により，Q, R における接線の方程式は,



$$\begin{cases} Ax_1x + By_1y = 1 & \cdots\cdots(1.6) \\ Ax_2x + By_2y = 1 & \cdots\cdots(1.7) \end{cases}$$

(1.6), (1.7) の交点が P(x_0, y_0) であるから,

$$\begin{cases} Ax_1x_0 + By_1y_0 = 1 & \cdots\cdots(1.8) \\ Ax_2x_0 + By_2y_0 = 1 & \cdots\cdots(1.9) \end{cases}$$

が同時に成り立つ.
このとき，(1.8) $\land$ (1.9) の成立は直線 $Ax_0x + By_0y = 1$ が Q, R を通ることを意味する.
従って，求める直線 QR の方程式は,

$$Ax_0x + By_0y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

[Note] (1.10) の表す直線を点 P(x_0, y_0) を**極**とする 2 次曲線 $\mathfrak{C}$ の**極線**という.

Comment

方程式 (1.1) は放物線を除く 2 次曲線，即ち，円 · 楕円 · 双曲線を想定している．更に，(2) の P は必ずしも 2 接線が引ける位置になくてもよい．例えば，P が楕円の内点の場合，(1.10) の表す直線 (**極線**) は，P を通る任意の割線と曲線との 2 交点における 2 接線の交点の軌跡として定義される．詳細は [Review 13.1.1] による演習とする．
また，放物線 $\mathfrak{C}: x^2=4py\ (p>0)$ に対して，$\mathfrak{C}$ 上にない点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を極とする極線の方程式は，

$$x_0x=2p(y+y_0)\ \land\ {x_0}^2\neq 4py_0$$

Point

$\mathfrak{C}: Ax^2+By^2=1$ に対して，

$$Ax_0x+By_0y=1\iff\begin{cases}\textbf{接線}\quad\cdots\quad (x_0,\,y_0)\in\mathfrak{C}\\ \textbf{極線}\quad\cdots\quad (x_0,\,y_0)\notin\mathfrak{C}\end{cases}$$

【Review 13.1.1】 – 内点を極とする極線 –

楕円

$$\mathfrak{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\,b>0)$$

の内点 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0)$ を通る任意の割線 $\mathfrak{g}_1$ と楕円との交点 Q_1, R_1 における 2 本の接線の交点を A_1 とする．
更に，P を通る g_1 とは異なる割線 $\mathfrak{g}_2$ と楕円との交点 Q_2, R_2 における 2 本の接線の交点を A_2 とする．
このとき，A_1, A_2 を通る直線の方程式を求めよ．

【Review 13.1.2】 – 調和共役性 –

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ に対して，$\mathfrak{C}$ の外点 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0)$ を極とする極線 $\mathfrak{L}: x_0x+y_0y=r^2$ を考える．
P を通る任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{L}$ との交点を Q とするとき，

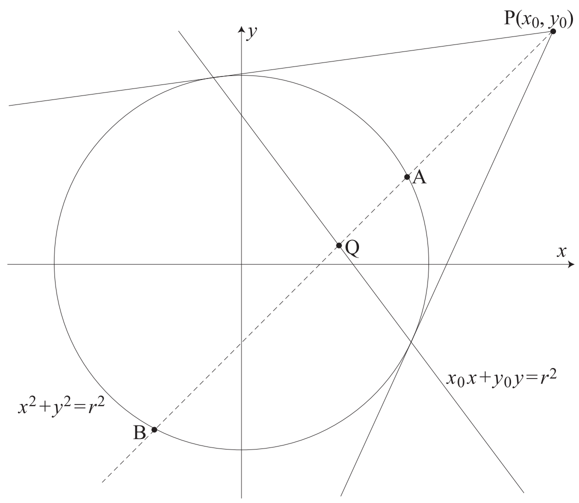
$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=-\overline{\mathrm{QA}}:\overline{\mathrm{QB}}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\overline{\mathrm{AB}}$ は**有向線分長** (符号付き長さ) を表す．**(下図参照)**

[Note] 題意の比を成り立たせる 2 点 P, Q を線分 AB に対する**調和共役点**という．

【Review 13.1.3】 89 名古屋市大

双曲線 $\mathfrak{H}: x^2-y^2=a^2\ (a>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0)\ (y_0\neq 0)$ から円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=a^2$ に引いた 2 本の接線の両接点を通る直線を $\mathfrak{L}$ とするとき，$\mathfrak{L}$ は $\mathfrak{H}$ に接することを示せ．



【Example 13.2】

楕円

$$\mathfrak{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

に外接する三角形 ABC が各辺の中点で $\mathfrak{E}$ に接しているものとする.

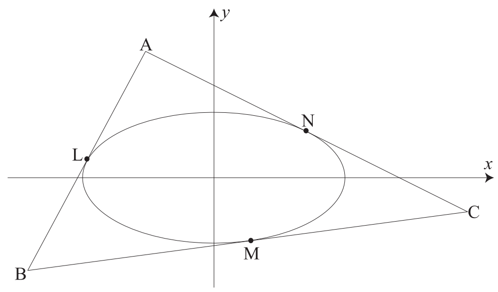
(1) 三角形 ABC の重心の座標を求めよ. (2) 三角形 ABC は一定の楕円に内接することを示せ.

Point

座標変換 $x'=\dfrac{x}{a},\ y'=\dfrac{y}{b}$ は,楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を単位円 $(x')^2+(y')^2=1$ に移す

[Note] 座標変換 (拡大 · 縮小) により,楕円を円に移して円の持つ**幾何的性質**を利用する.

【解説】



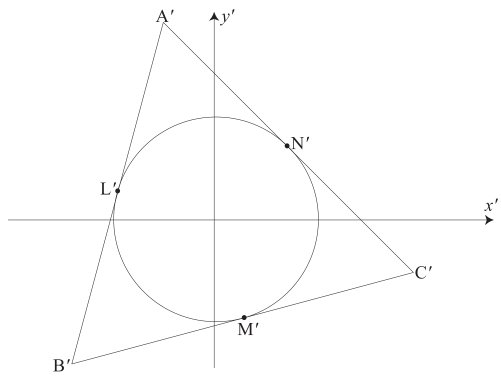
xy 平面上の三角形 ABC と楕円 $\mathfrak{E}$ に対して,座標変換

$$x'=\frac{x}{a},\quad y'=\frac{y}{b} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を与え,$x'y'$ 平面に移した図形を三角形 A′B′C′, $\mathfrak{E}'$ とするとき,
$\mathfrak{E}'$ の方程式は,$(x')^2+(y')^2=1$,即ち,$x'y'$ 平面における原点を中心とする単位円を表す.

また,3 点 M, N, L は三角形 ABC の各辺の中点とするとき,
3 点 M′, N′, L′ は三角形 A′B′C′ の各辺の中点である.即ち,

$$\mathrm{A'L'}=\mathrm{L'B'},\quad \mathrm{B'M'}=\mathrm{M'C'},\quad \mathrm{C'N'}=\mathrm{N'A'} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$



更に,$\mathfrak{E}'$ が円であることから,

$$\mathrm{A'L'}=\mathrm{A'N'},\quad \mathrm{B'L'}=\mathrm{B'M'},\quad \mathrm{C'M'}=\mathrm{C'N'} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

このとき,(2.2), (2.3) により,

$$\mathrm{A'L'}=\mathrm{L'B'}=\mathrm{B'M'}=\mathrm{M'C'}=\mathrm{C'N'}=\mathrm{N'A'} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) により,三角形 A′B′C′ は正三角形であり,単位円 $\mathfrak{E}'$ はその内接円である.
従って,三角形 A′B′C′ の内心 O はその重心に一致しており,
これを逆変換 $x=ax',\ y=by'$ で移した xy 平面上の原点 O が三角形 ABC の重心である.
次に,$x'y'$ 平面において,重心を O とする任意の正三角形 A′B′C′ に外接する円は,
O を中心とする円に限られ,内接円 $\mathfrak{E}'$ の半径が 1 であることから外接円 $\mathfrak{E}''$ の半径は 2 であり,
方程式 $(x')^2+(y')^2=4$ で与えられる.これに,逆変換 $x=ax',\ y=by'$ を施して,xy 平面上の楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4 \iff \frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{(2b)^2}=1 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

を得るので,題意を満たす任意の三角形 ABC はこの楕円に内接するといえる.

Point

拡大・縮小変換 $x' = \dfrac{x}{a},\ y' = \dfrac{y}{b}$ により，

- 線分比は不変．即ち，中点は中点に移る．
- 平行は保たれるが垂直は保たれない．即ち，角の大きさは変わる．
- 直線は直線に移り，2 次曲線 (楕円・双曲線・放物線) は 2 次曲線に移る．
- 図形と図形の共有点の個数は不変．即ち，三角形は三角形に移る．

【Review 13.2.1】 89 図書館情報大

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

に内接する四辺形の面積の最大値を求めよ．

【Review 13.2.2】 93 名古屋市大

定点 $(0,\ a)$ $(a > 0)$ を通る直線と楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

との交点を P, Q とするとき，線分 PQ の中点 R の描く軌跡の方程式を求めよ．

【Review 13.2.3】 95 東大

(1) 双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線が 2 本の漸近線と交わる点を A, B とする．

このとき，P は線分 AB の中点であることを示せ．

(2) 三角形 OAB の面積は P の位置に無関係に一定であることを示し，その値を求めよ．

【Example 13.3】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

に対して，$\mathfrak{E}$ の外点 P から $\mathfrak{E}$ に引いた 2 本の接線が直交するとき，P の軌跡を求めよ．

【解説】

xy 平面上の直交 2 直線を m を媒介変数として，

$$\mathfrak{L}_1 : mx - y + n_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2 : x + my + n_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表せば，(3.1) を変換 $x = ax'$, $y = by'$ で移した直線は，

$$\mathfrak{L}_1{}' : max' - by' + n_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2{}' : ax' + mby' + n_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) が単位円 $\mathfrak{E}' : (x')^2 + (y')^2 = 1$ に接するための条件は，

$$\frac{\left|ma \times 0 - b \times 0 + n_1\right|}{\sqrt{m^2a^2 + b^2}} = 1 \ \wedge \ \frac{\left|a \times 0 + mb \times 0 + n_2\right|}{\sqrt{a^2 + m^2b^2}} = 1 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

即ち，

$$n_1 = \pm\sqrt{m^2a^2 + b^2} \ \wedge \ n_2 = \pm\sqrt{a^2 + m^2b^2} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) のとき，xy 平面上の直交 2 直線

$$\mathfrak{L}_1 : mx - y \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2} = 0, \quad \mathfrak{L}_2 : x + my \pm \sqrt{a^2 + m^2b^2} = 0 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

は xy 平面上の楕円 $\mathfrak{E}$ に接している．

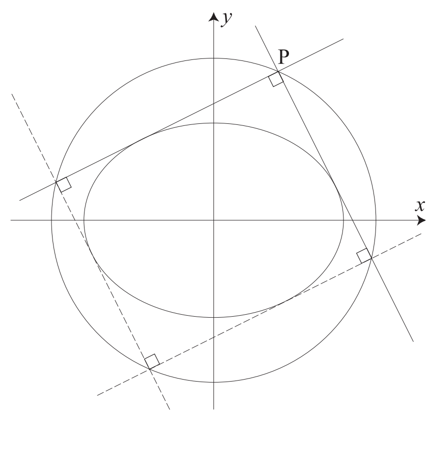
(3.5) において，$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ が 2 本ずつ存在するのは，傾き m の接線が原点対称に 2 本ずつ存在するからである．

P は $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の交点と考えられるから，その座標を $(x_0,\ y_0)$ と表すと，

$$\begin{cases} mx_0 - y_0 = \pm\sqrt{m^2a^2 + b^2} \\ x_0 + my_0 = \pm\sqrt{a^2 + m^2b^2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

が同時に成り立ち，(3.6) より m を消去して，

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = a^2 + b^2 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$



(3.7) は，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ が円 $\mathfrak{C} : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上に存在することを意味し，円 $\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{E}$ を内包するので，$\mathfrak{C}$ 上の任意の点から $\mathfrak{E}$ に常に 2 本の接線が引けるので，求める軌跡は，

$$\mathfrak{C} : x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

[Note]　円 $\mathfrak{C}$ を楕円 $\mathfrak{E}$ の**準円**という．

【Review 13.3.1】

双曲線

$$\mathfrak{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

に対して，点 P から引いた 2 本の接線が直交するとき，P の軌跡の方程式を求めよ.

[Note] P の軌跡の円 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ $(a > b > 0)$ を双曲線 $\mathfrak{H}$ の**準円**という.

【Review 13.3.2】 98 慶応義塾

xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ に 4 点で外接する長方形を考える.

(1) 長方形の対角線の長さは長方形の位置に依らず一定であることを示し，その長さを a, b の式で表せ.

(2) 長方形の面積の最大値を a, b の式で表せ.

【Review 13.3.3】 90 東大

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を $\mathfrak{C}_0$，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ を $\mathfrak{E}$ と表す.

$\mathfrak{C}_0$ 上の任意の点 P に対して，P を頂点として，$\mathfrak{C}_0$ に外接して $\mathfrak{E}$ に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b を用いて表せ.