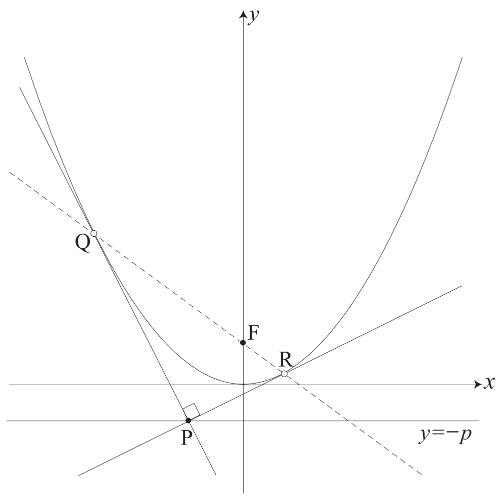
【Example 14.1】
放物線 $\mathfrak{P} : x^2 = 4py\ (p > 0)$ に対して，$\mathfrak{P}$ 上にない点 P から引いた 2 本の接線が直交する．
このとき，P の描く軌跡の方程式を求めよ．

Point
- 放物線の直交 2 接線の交点の軌跡は**準線**である
- ○ 楕円 · 双曲線の直交 2 接線の交点の軌跡は**準円**

【解説】
接点 Q, R の x 座標を $a,\ b\ (a < b)$ とすると，
両接点における $\mathfrak{P}$ の接線の方程式は，

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_1 : 2ax - 4py - a^2 = 0 & \cdots\cdots(1.1) \\ \mathfrak{L}_2 : 2bx - 4py - b^2 = 0 & \cdots\cdots(1.2) \end{cases}$$



これらの交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と表すと，

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \ \wedge\ y_0 = \frac{ab}{4p} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

更に，$\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2$ は直交するので，

$$\frac{a}{2p} \times \frac{b}{2p} = -1 \iff ab = -4p^2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.3), (1.4) により，

$$y_0 = \frac{-4p^2}{4p} = -p\ (< 0) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

従って，P は放物線の準線 $y = -p$ 上にある．(**必要条件**)
次に，Q, R の移動に伴い，P は準線 $y = -p$ 上全体を移動することを示す．(**十分性**)
(1.3), (1.4) により，$a,\ b$ を解とする t の 2 次方程式は，

$$t^2 - (a+b)t + ab = 0 \iff t^2 - 2x_0 t - 4p^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

と表され，(1.6) の判別式を D と表せば，

$$\mathrm{D}/4 = {x_0}^2 + 4p^2 > 0 \quad (\forall x_0) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.7) は，P の x 座標 x_0 がすべての実数値をとり得ることを意味する．
従って，求めるべき軌跡の方程式は，

$$\textbf{準線} : y = -p \quad (-\infty < x < \infty) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

[Note]

Q, R を結ぶ直線，即ち，P$(x_0,\ y_0)$ を極とする放物線の極線は，

$$x_0 x = 2p(y + y_0) \ \wedge\ x_0 = \frac{a+b}{2} \ \wedge\ y_0 = \frac{ab}{4p} \quad \bigl(\because\ (1.3)\bigr) \iff y = \frac{a+b}{4p}x - \frac{ab}{4p} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ここで，(1.9) と y 軸との交点は，

$$-\frac{ab}{4p} = -\frac{-4p^2}{4p} = p \quad \bigl(\because\ (1.4)\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

即ち，焦点 F$(0,\ p)$ であるので，

放物線には，**準線上の点を極とする極線は焦点を通る**，という性質がある

【Review 14.1.1】

放物線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上の異なる 2 点 $(x_1, a{x_1}^2)$，$(x_2, a{x_2}^2)$ $(x_< x_2)$ において引いた 2 本の接線の交点を P とする．この放物線と 2 本の接線が囲む領域の面積が一定値 S を満たして P が移動するとき，その軌跡の方程式を求めよ．

【Review 14.1.2】

放物線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ に対して，点 P から引いた 2 本の接線の交角が θ を保って P が移動するとき，その軌跡の方程式を求めよ．また，$\theta \to \pi/2$ のとき，軌跡の極限の図形を調べよ．ただし，$0 < \theta < \pi/2$.

[Note]　まず，$\theta = \pi/4$ で実験した後，一般の θ で調べてみよ．

【Example 14.2】

放物線 $\mathfrak{P} : y^2 = 4px\ (p > 0)$ の焦点を F とし，放物線上の任意の点を $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ とする．
P における接線は，直線 PF と，P を通り放物線の対称軸に平行な直線との交角を 2 等分することを示せ．

【解説】

P における接線を $\mathfrak{L}_1$，$\mathfrak{L}_1$ の x 切片を Q，直線 PF を $\mathfrak{L}_2$，
P を通り，x 軸に平行な直線を $\mathfrak{L}_3$ とするとき，示すべき条件は，

$$\angle\mathfrak{L}_2\mathrm{P}\mathfrak{L}_1 = \angle\mathfrak{L}_1\mathrm{P}\mathfrak{L}_3 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

ここで，

$$\angle\mathfrak{L}_2\mathrm{P}\mathfrak{L}_1 = \angle\mathrm{QPF}\ (\textbf{対頂角}) \ \wedge\ \angle\mathfrak{L}_1\mathrm{P}\mathfrak{L}_3 = \angle\mathrm{PQF}\ (\textbf{同位角}) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

により，

$$\angle\mathfrak{L}_2\mathrm{P}\mathfrak{L}_1 = \angle\mathfrak{L}_1\mathrm{P}\mathfrak{L}_3 \iff \angle\mathrm{QPF} = \angle\mathrm{PQF} \iff \mathrm{FP} = \mathrm{FQ} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

即ち，(2.3) の成立を示せばよい．
放物線の方程式を x で微分して，

$$2y \times \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = 4p \quad (p > 0) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) より，$\mathrm{P}(t^2/4p,\ t)$ における接線の傾きは，

$$\left.\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right|_{(x,\,y)=(t^2/4p,\,t)} = \frac{4p}{2t} = \frac{2p}{t} \quad (\because\ \mathrm{P} \neq \mathrm{O}) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

即ち，接線 $\mathfrak{L}_1$ の方程式は，

$$y - t = \frac{2p}{t}\left(x - \frac{t^2}{4p}\right) \iff y = \frac{2p}{t}x + \frac{t}{2} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

従って，$\mathfrak{L}_1$ の x 切片の座標は，

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{t^2}{4p},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

このとき，

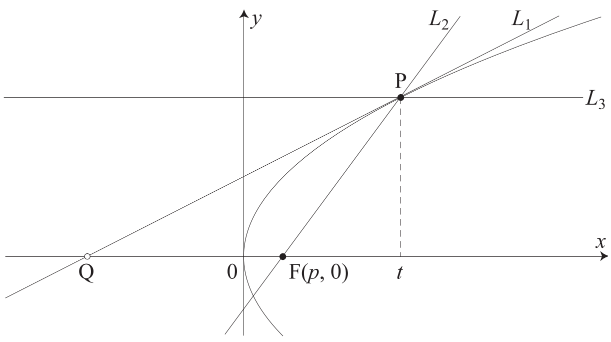
$$\mathrm{FQ} = \left|p - \left(\frac{-t^2}{4p}\right)\right| = p + \frac{t^2}{4p} \quad (\because\ p > 0) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

更に，

$$\mathrm{FP} = \sqrt{\left(\frac{t^2}{4p} - p\right)^2 + t^2} = p + \frac{t^2}{4p} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.8), (2.9) により，

$$\mathrm{FP} = \mathrm{FQ} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$



Comment

　一般に，放物線は次の性質を持つ．

- 放物線の対称軸に平行に入射した光線は，放物線上で反射して，その焦点を通過する．

また，楕円，双曲線にも類似の性質がある．

- 楕円の一方の焦点から出た光線は，楕円曲線上で反射して，他方の焦点を通過する．
- 双曲線の一方の焦点から出た光線は，双曲線上で反射して，他方の焦点から出た光線と重なる．

これらの性質を確認するのが次の [Review] であり，証明には解析幾何的方法と初等幾何的方法の二通りある．

【Review 14.2.1】

　楕円 $\mathfrak{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)$ の焦点を F, F$'$ とする．

$\mathfrak{E}$ 上の任意の点 P における接線は，$\angle$FPF$'$ の外角を 2 等分することを示せ．

【Review 14.2.2】

　双曲線 $\mathfrak{H}: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)$ の焦点を F, F$'$ とする．

$\mathfrak{H}$ 上の任意の点 P における接線は，$\angle$FPF$'$ を 2 等分することを示せ．

【Example 14.3】

(1) 楕円 $\mathfrak{E}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ の方程式を焦点 $\mathrm{F}(c,\,0)$ を極とする極方程式に変換せよ.

(2) 双曲線 $\mathfrak{H}:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\,b>0)$ の方程式を焦点 $\mathrm{F}(c,\,0)$ を極とする極方程式に変換せよ.

(1), (2) において，$c>0$ とする.

Point

xy 直交座標と原点を極とする極座標 $(r,\,\theta)$ の関係;

$$r^2=x^2+y^2\ \ \wedge\ \ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ \wedge\ \ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ここで，r は原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ との距離を表し，θ は OP と x 軸の正方向とのなす角 **(偏角)** を表す.

【解説】

(1) 楕円上の点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ と焦点 $\mathrm{F}(c,\,0)$ との距離を r とし，FP の偏角を θ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta+c\\r\sin\theta\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) を楕円の方程式に代入して，

$$b^2(r\cos\theta+c)^2+a^2(r\sin\theta)^2-a^2b^2=0\ \ \wedge\ \ c=\sqrt{a^2-b^2}\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

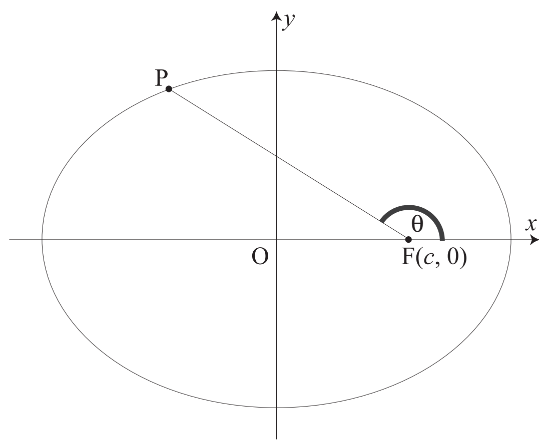
(3.2) を r の方程式として整理して，

$$\begin{aligned}&\left(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\right)r^2+2b^2c\cos\theta\cdot r+b^2(c^2-a^2)=0\ \ \wedge\ \ c=\sqrt{a^2-b^2}\\&\iff\left(a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta\right)r^2+2b^2\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\cdot r-b^4=0\\&\iff\left(\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)r+b^2\right)\left(\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)r-b^2\right)=0\qquad\cdots\cdots(3.3)\end{aligned}$$

ここで，(3.3) の第 1 因数は常に正なので，第 2 因数より，

$$\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)r-b^2=0\iff r=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

即ち，(3.4) が楕円 $\mathfrak{E}$ の**極方程式**である.



(2) 双曲線上の点 P$(x,\ y)$ と焦点 F$(c,\ 0)$ との距離を r とし，FP の偏角を θ とするとき，
(3.1) を双曲線の方程式に代入して，

$$b^2(r\cos\theta+c)^2-a^2(r\sin\theta)^2-a^2b^2=0\ \wedge\ c=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を r の方程式として整理して，

$$\begin{aligned}&\left(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\right)r^2+2b^2c\cos\theta\cdot r+b^2(c^2-a^2)=0\ \wedge\ c=\sqrt{a^2+b^2}\\ &\iff \left((a^2+b^2)\cos^2\theta-a^2\right)r^2+2b^2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\cdot r+b^4=0\\ &\iff \left(\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta-a\right)r+b^2\right)\left(\left(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a\right)r+b^2\right)=0 \qquad \cdots\cdots(3.6)\end{aligned}$$

(3.6) により，

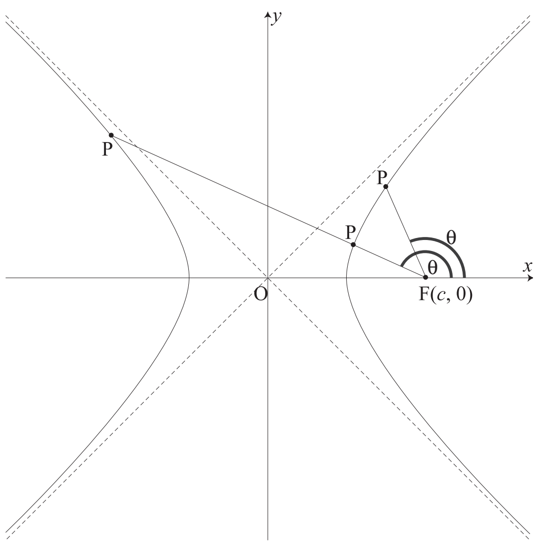
$$\begin{cases} r=\dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta} & \cdots\cdots(3.7)\\ r=-\dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta} & \cdots\cdots(3.8)\end{cases}$$

即ち，(3.7) は双曲線 $\mathfrak{H}$ の右側 $x>0$ の部分を表し，(3.8) は $\mathfrak{H}$ の左側 $x<0$ の部分を表す．

[Note]　放物線 $y^2=4px\ (p>0)$ の場合，
焦点 F$(p,\ 0)$ を極とする極方程式は，

$$r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

と表せることを確認せよ．



Comment

2 次曲線 (放物線 · 楕円 · 双曲線) に対して，その**焦点を極とする極方程式**は，

$$\begin{cases} \textbf{放物線} & y^2=4px & \cdots\cdots & r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}\\ \textbf{楕円} & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \cdots\cdots & r=\dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}\\ \textbf{双曲線} & \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \cdots\cdots & r=\dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta}\ \vee\ r=-\dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta}\end{cases}$$

【Review 14.3.1】 97 帯広畜産大

(1) 点 $\mathrm{F}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ と直線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めよ.

(2) (1) の F を極とし，x 軸の正の部分とのなす角 θ を偏角とする極座標を定めるとき，
(1) の P の軌跡を

$$r=r(\theta)\quad \left(r>0,\ \ 0\leqq\theta<2\pi\right)$$

の形の極方程式で求めよ.

(3) F を通る任意の直線と (1) で求めた曲線との交点を Q, R とするとき，

$$\frac{1}{\mathrm{QA}}+\frac{1}{\mathrm{RA}}$$

が一定であることを示せ.

【Review 14.3.2】

楕円

$$\mathfrak{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$$

の一方の焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とし，F を極とする $\mathfrak{E}$ の極線を $\mathfrak{g}$ で表す.
また，F を通る任意の直線と $\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{g}$ との交点を左から順に A, B, P とし，

$$\mathrm{AP}=r_1,\quad \mathrm{BP}=r_2,\quad \mathrm{FP}=r_3$$

と表すとき，

$$r_3=\frac{2}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}}\quad(\textbf{調和平均})$$

が成り立つことを示せ.

【Example 14.4】 94 工学院大

(1) 曲線

$$\mathfrak{C}_1 : ax^2+bxy+cy^2+d=0 \quad \cdots\cdots(4.1)$$

を原点の周りに角 θ 回転した図形の方程式を求めよ.

(2) 曲線

$$\mathfrak{C}_2 : \left(10+3\sqrt{3}\right)x^2+6xy+\left(10-3\sqrt{3}\right)y^2-16=0 \quad \cdots\cdots(4.2)$$

は楕円を表すことを示せ．また，その長軸と短軸の長さと焦点の座標を求めよ.

【解説】

(1) 点 $(x,\, y)$ を原点中心に角 θ 回転した点を $(x',\, y')$ と表すとき，回転行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots\cdots(4.3) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdots\cdots(4.4)$$

と表せるので，(4.4) により,

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \ \wedge\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad \cdots\cdots(4.5)$$

このとき，(4.5) により,

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}\left((x')^2-(y')^2\right)\cos 2\theta + x'y'\sin 2\theta + \dfrac{1}{2}\left((x')^2+(y')^2\right) & \cdots\cdots(4.6) \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\left((y')^2-(x')^2\right)\cos 2\theta - x'y'\sin 2\theta + \dfrac{1}{2}\left((x')^2+(y')^2\right) & \cdots\cdots(4.7) \\ xy = \dfrac{1}{2}\left((y')^2-(x')^2\right)\sin 2\theta + x'y'\cos 2\theta & \cdots\cdots(4.8) \end{cases}$$

と表せるので，(4.6), (4.7), (4.8) を (4.1) に代入して,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left((a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta + a + c\right)(x')^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left((-a+c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta + a + c\right)(y')^2 \\ &\qquad\qquad + \left((a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right)x'y' + d = 0 \quad \cdots\cdots(4.9) \end{aligned}$$

ここで，x', y' を x, y に書き改めれば,

$$\begin{aligned} &\left((a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta + a + c\right)x^2 \\ &\qquad + \left((-a+c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta + a + c\right)y^2 \\ &\qquad\qquad + 2\left((a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right)xy + 2d = 0 \quad \cdots\cdots(4.10) \end{aligned}$$

即ち，(4.10) が求める方程式である.

(2) $\mathfrak{C}_2$ が楕円を表すためには，適当な θ に対して，
(4.10) が楕円の標準形

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1 \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

と同値であればよいので，(4.10) における xy の係数に対して，

$$(a-c)\sin 2\theta+b\cos 2\theta=0 \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

を満たす θ_0 を求め，θ_0 に対する x^2, y^2 の各係数を調べればよい．
題意より与えられた係数は，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=\left(10+3\sqrt{3},\ 6,\ 10-3\sqrt{3},\ -16\right) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

このとき，(4.12) により，

$$\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=0 \iff \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0 \iff 2\theta+\frac{\pi}{6}\equiv 0 \pmod{\pi} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

(4.14) の解として，$\theta_0=-15^\circ$ を選ぶと，
$\mathfrak{C}_2$ を原点中心に -15° 回転させた図形 $\mathfrak{C}_2{}'$ の方程式は，

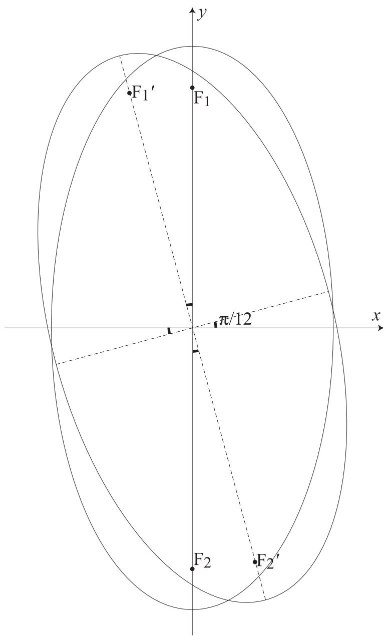
$$\mathfrak{C}_2{}':16x^2+4y^2=16 \iff x^2+\frac{y^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

即ち，$\mathfrak{C}_2$ に適当な回転を与えて標準形 $\mathfrak{C}_2{}'$ に移るので，$\mathfrak{C}_2$ は楕円を表すといえる．
更に，(4.15) により，$\mathfrak{C}_2$ の長径は 4，短径は 2 である．
また，$\mathfrak{C}_2{}'$ の焦点は $\left(0,\ \pm\sqrt{3}\right)$ であるので，これを原点中心に 15° 回転して，

$$\begin{pmatrix}\cos 15^\circ & -\sin 15^\circ\\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1\\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}+1\\ \sqrt{3}+1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.16)$$

即ち，$\mathfrak{C}_2$ の焦点の座標は，

$$\left(\pm\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \pm\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\quad(\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(4.17)$$



Point

方程式 $ax^2+bxy+cy^2+px+qy+r=0$ の表す図形は，2 次曲線 (双曲線 · 放物線 · 楕円) であり，適当な座標変換 (回転移動 · 平行移動) により，次のいずれかの標準型に変換される．

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \vee \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \vee \ x^2=4py \ \vee \ y^2=4px$$

これを 2 次曲線の**標準化**といい，**判別式** $\mathrm{D}=b^2-4ac$ の符号によって，次のように判別される；

$\mathrm{D}>0 \cdots$ **双曲線**，　$\mathrm{D}=0 \cdots$ **放物線**，　$\mathrm{D}<0 \cdots$ **楕円**

【Review 14.4.1】

次の 2 次曲線を標準化せよ．

(1) $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$　　(2) $11x^2+4xy+14y^2-4x-28y-16=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2-6x-8y+5=0$

【Review 14.4.2】　95 千葉大

平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$ からの距離の和が 10 であるような点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする．

(1) $\mathfrak{C}$ の方程式が $ax^2+by^2+cxy=1$ の形になるとき，a, b, c の値を求めよ．

(2) $\mathfrak{C}$ を原点の周りに -45° 回転させた曲線 $\mathfrak{C}'$ の表す方程式を x, y の式で求めよ．