【Example 15.1】 83 東大

2 次行列 $\mathbf{M}$ の表す xy 平面上の 1 次変換 T が次の条件を満たすものとする.

- T は任意の三角形をそれと相似な三角形に移す
- T は点 $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ を点 $\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right)$ に移す

このような行列 $\mathbf{M}$ をすべて求めよ.

Point (表現行列)

1 次変換 T が点 $(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ を点 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ にそれぞれ移すとき, T の表現行列 $\mathbf{M}$ は,

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

即ち, 表現行列は 2 点の像で定まる.

【解説】

必要条件として, 平面上の 3 点

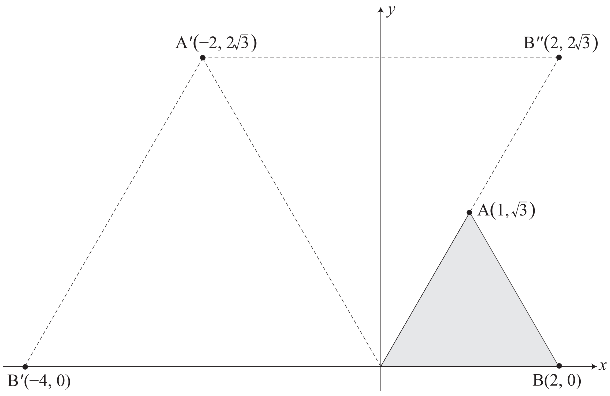
$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(1,\ \sqrt{3}\right),\ \mathrm{B}(2,\ 0)$$

の作る正三角形 OAB の像を考える.

題意より, 正三角形 OAB は,

$$\mathrm{A}'\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right),\ \mathrm{B}'(-4,\ 0),\ \mathrm{B}''\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$$

として, 正三角形 OA′B′ または正三角形 OA′B″ に移る.



- 正三角形 OA′B′ に移る場合;

$$\mathrm{A}\left(1,\ \sqrt{3}\right) \xrightarrow{T} \mathrm{A}'\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right),\quad \mathrm{B}(2,\ 0) \xrightarrow{T} \mathrm{B}'(-4,\ 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

より,

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1 & 2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) は, y 軸対称移動と原点中心 2 倍の拡大を与える変換なので**十分**である.

- 正三角形 OA′B″ に移る場合;

$$\mathrm{A}\left(1,\ \sqrt{3}\right) \xrightarrow{T} \mathrm{A}'\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right),\quad \mathrm{B}(2,\ 0) \xrightarrow{T} \mathrm{B}''\left(2,\ 2\sqrt{3}\right) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

より,

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1 & 2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) は, 60° の回転移動と原点中心 2 倍の拡大を与える変換なので**十分**である.

以上より,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

【Review 15.1.1】　92 電通大

行列 $\mathbf{M}$ の表す 1 次変換 T と 3 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(1,\ 0)$, $\mathrm{P}_3(a,\ b)$ $(a \neq 1)$ がある.

$$\mathrm{P}_1 \xrightarrow{T} \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{P}_2 \xrightarrow{T} \mathrm{P}_3, \quad \mathrm{P}_3 \xrightarrow{T} \mathrm{P}_1$$

が成り立つとき, $\mathbf{M}$ の成分を求めよ.

[答] $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

【Review 15.1.2】

平面上に 3 本の直線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ がある.

$$\mathfrak{g}_1 : 2x - y + 1 = 0, \quad \mathfrak{g}_2 : x - y + 1 = 0, \quad \mathfrak{g}_3 : 3x - 4y + 5 = 0$$

1 次変換 T によって, $\mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_3$ と移されるとき, T の表現行列 $\mathbf{M}$ を求めよ.

[答] $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

【Review 15.1.3】　88 東大

xy 平面上の 1 次変換 T が次の条件を満たしている.

- 点 $(1,\ 0)$ は T によって第 4 象限の内部に移る
- 点 $(0,\ 1)$ は T によって第 2 象限の内部に移る
- 点 $(1,\ 1)$ は T によって第 1 象限の内部に移る

このとき, T には逆変換 T^{-1} が存在することを示せ.
また, 点 P の像 Q が第 1 象限の内部にあるとき, 点 P も第 1 象限の内部にあることを示せ.

[証明略]

【Example 15.2】 88 浜松医大

行列 $\mathbf{M}$ の表す 1 次変換は，円 $x^2+y^2=4$ を線分 $y=\sqrt{3}x\ (-2 \leq x \leq 2)$ に移し，原点以外のある点をその点自身に移す．即ち，原点以外の不動点が存在する．このような $\mathbf{M}$ をすべて求めよ．

【解説】

表現行列 $\mathbf{M}$ を

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と置けば，円周上の任意の点 $(2\cos t,\ 2\sin t)$ の像は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a\cos t+2b\sin t \\ 2c\cos t+2d\sin t \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) が直線 $y=\sqrt{3}x$ 上にあることから，

$$2c\cos t+2d\sin t=\sqrt{3}(2a\cos t+2b\sin t) \quad (-\infty<t<\infty) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) に対して，$t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ を代入して，

$$c=\sqrt{3}a \ \wedge\ d=\sqrt{3}b \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

なる必要十分条件を得る．即ち，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ \sqrt{3}a & \sqrt{3}b \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

次に，(2.2) の x 座標に関して，

$$x=2a\cos t+2b\sin t=2\sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\omega) \quad (-\infty<t<\infty) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) により，

$$-2\sqrt{a^2+b^2} \leq x \leq 2\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) と題意の条件 $-2 \leq x \leq 2$ により，

$$\sqrt{a^2+b^2}=1 \iff a^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

更に，平面上の任意の点 $(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \sqrt{3}a & \sqrt{3}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ \sqrt{3}(ax+by) \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

より，**不動点**は $y=\sqrt{3}x$ 上にあるので，その不動点を $(s,\ \sqrt{3}s)\ (s \neq 0)$ と表せば，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \sqrt{3}a & \sqrt{3}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ \sqrt{3}s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ \sqrt{3}s \end{pmatrix} \iff (a+\sqrt{3}b-1)s=0 \iff a+\sqrt{3}b=1 \quad (\because\ s \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

連立方程式 (2.8) ∧ (2.10) を解いて，

$$(a,\ b)=(1,\ 0),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

Point **(非正則変換)**

det.$\mathbf{M}=0$ なる行列の表す 1 次変換により，平面上の点はすべて原点を通る直線 $y=kx$ 上に移る．このような変換を**非正則変換**といい，その表現行列 $\mathbf{M}$ は次の形に表される．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$$

Comment

例題の解説では，(2.1), $\cdots$, (2.4) の計算を経由して (2.5) の $\mathbf{M}$ を導出しているが，直線 $y=\sqrt{3}x$ 上に移る，という問題の条件から，$\mathbf{M}$ の 1 行目の成分と 2 行目の成分が定数 $\sqrt{3}$ で比例するのは明らかなので，(2.1), $\cdots$, (2.4) の一連の計算は省略してもよい．更に，非正則変換では次の重要な性質を持ち，第 16 回のテーマとなる**不動直線**・**不変直線**に関係するので記憶に留めておいて貰いたい．

Point

非正則変換の表現行列は，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & ma \\ ka & kma \end{pmatrix}$$

の形に表され，この変換によって直線 $x+my=c\ (\forall c)$ 上のすべての点は点 $(ac,\ kac)$ に移る．特に，trace.$\mathbf{M}=1$ のとき，直線 $x+my=c$ 上のすべての点は，直線 $kx-y=0$, $x+my=c$ の交点に移る．即ち，直線 $x+my=c\ (\forall c)$ は変換 $\mathbf{M}$ の**不変直線**である．

何故なら，直線 $x+my=c$ 上の任意の点 $(x_0,\ y_0)$ に対して，

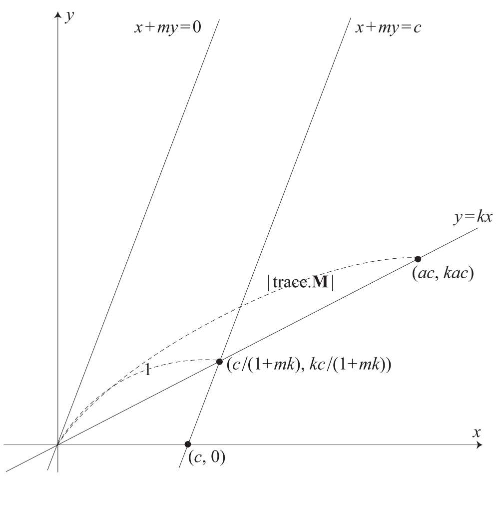
$$\begin{pmatrix} a & ma \\ ka & kma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(x_0+my_0) \\ ka(x_0+my_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac \\ kac \end{pmatrix} \quad (\because\ x_0+my_0=c)$$

更に，2 直線 $kx-y=0$, $x+my=c$ の交点

$$\left(\frac{c}{1+mk},\ \frac{kc}{1+mk}\right) \quad (1+mk\neq 0)$$

に対して，trace.$\mathbf{M}=a(1+mk)=1$ のとき，

$$\left(\frac{c}{1+mk},\ \frac{kc}{1+mk}\right)=(ac,\ kac) \quad \left(\because\ \frac{1}{1+mk}=a\right)$$



【Review 15.2.1】　92 一橋大

行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換は，円 $(x-1)^2+y^2=1$ を線分 AB に移す．ここで，A(3, 6) である．このとき，a, b, c の値と点 B の座標を求めよ．

[答] $a=\pm\sqrt{3}$, $b=2$, $c=\pm2\sqrt{3}$ (複号同順)，B$(-1,\ -2)$

【Review 15.2.2】　93 熊本大

行列 $\begin{pmatrix} a+1 & 2b \\ b & -a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 T は平面上のすべての点を直線 $\mathfrak{L}: y=mx$ 上に移す．

(1) 直線 $\mathfrak{L}$ 上の点は T によって不動であることを示せ．

(2) 放物線 $y^2=x-1$ が T によって $\mathfrak{L}$ の $x\geq 0$ の部分に移されるとき，m, a, b の値を求めよ．

[答] $m=\pm1$, $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=\pm\dfrac{1}{3}$ (複号同順)

【Example 15.3】

(1) 原点を中心とする角 θ の回転を表す行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で表されることを示せ.

(2) 直線 $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ に関する対称移動を表す行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

で表されることを示せ.

(3) 平面内の 2 直線

$$\mathfrak{L}_\alpha : x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0, \quad \mathfrak{L}_\beta : x\sin\beta - y\cos\beta = 0$$

に関する対称移動を表す行列をそれぞれ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ とするとき,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{BA}$$

が成り立つことを示せ.

【解説】

(1) **次頁左図**より, 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の像は, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるから,
表現行列を $\mathbf{M}$ として,

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \iff \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

ここで, $0 \leq \theta < 2\pi$ である.

(2) **次頁右図**より, 点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(1,\ 0)$ の像は, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ であるから,
表現行列を $\mathbf{N}$ として, $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ のとき,

$$\mathbf{N}\begin{pmatrix} \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta \\ \sin\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta \\ \sin\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{N} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \cos 2\theta\sin\theta & \cos\theta(1-\cos 2\theta) \\ \sin 2\theta\sin\theta & \sin\theta - \sin 2\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

従って,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad \left(\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}\right) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

また, 直線 $y = 0$ に関する対称移動は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \iff \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

で表され, (3.3) は (3.2) における $\theta \equiv 0$ の場合なので,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < \pi) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3) (2) の結果より，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta\\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

このとき，

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}\cos 2\beta\,\cos 2\alpha+\sin 2\beta\,\sin 2\alpha & \cos 2\beta\,\sin 2\alpha-\sin 2\beta\,\cos 2\alpha\\ \sin 2\beta\,\cos 2\alpha-\cos 2\beta\,\sin 2\alpha & \sin 2\beta\,\sin 2\alpha+\cos 2\beta\,\cos 2\alpha\end{pmatrix}$$

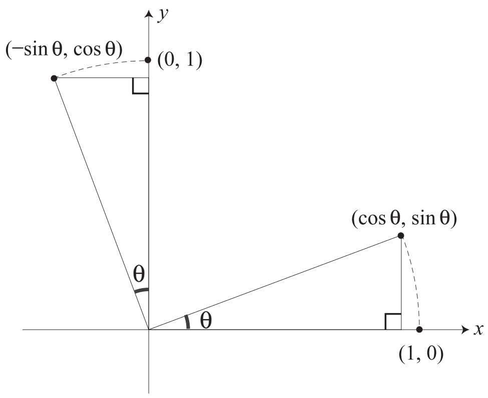
$$\iff \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}\cos 2(\beta-\alpha) & -\sin 2(\beta-\alpha)\\ \sin 2(\beta-\alpha) & \cos 2(\beta-\alpha)\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

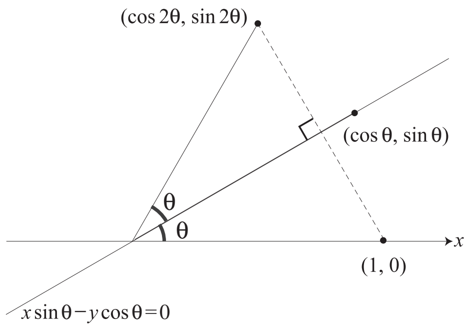
(3.6) において，α, β を入れ替えて，

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta)\\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta)\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.6) により，**BA** は原点中心，角 $2(\beta-\alpha)$ の回転を表す行列であり，
(3.7) により，**AB** は原点中心，角 $2(\alpha-\beta)$ の回転を表す行列であるから，両者は逆変換の関係にある．
即ち，

$$(\mathbf{BA})^{-1}=\mathbf{AB} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$





Point **(回転行列の性質)**

原点を中心とする角 θ の回転を表す行列を $\mathbf{K}(\theta)$ で表すとき，

$$\bullet\ \mathbf{K}(\alpha)\cdot\mathbf{K}(\beta)=\mathbf{K}(\alpha+\beta)\quad \bullet\ \mathbf{K}(\theta)^n=\mathbf{K}(n\theta)\ \ (n:\text{正整数})\quad \bullet\ \mathbf{K}(\theta)^{-1}=\mathbf{K}(-\theta)$$

特に，第二式は d'Moivre **の定理** $(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta$ と同値である．

Point **(対称移動)**

直線 $x\sin\theta-y\cos\theta=0$ に関する対称移動を表す行列は，

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\overset{\text{put}}{=}\mathbf{R}(\theta)$$

で与えられ，trace.$\mathbf{R}=0\ \wedge\ $det.$\mathbf{R}=-1\ (\forall\theta)$ より，$\mathbf{R}^2=\mathbf{E}$ (**恒等変換**) である．

— 一次変換の図形的解釈 —

変換 T の表現行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

による点 (1, 1), (2, 1) の像を考えてみる．

$\mathbf{M}$ による点 $(x,\ y)$ の像は，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

のように移る．**(下図)**

ここで，2 個の一次独立なベクトル (2, 1), (1, 2) を単位とする斜交 $x'y'$ 座標を導入する．

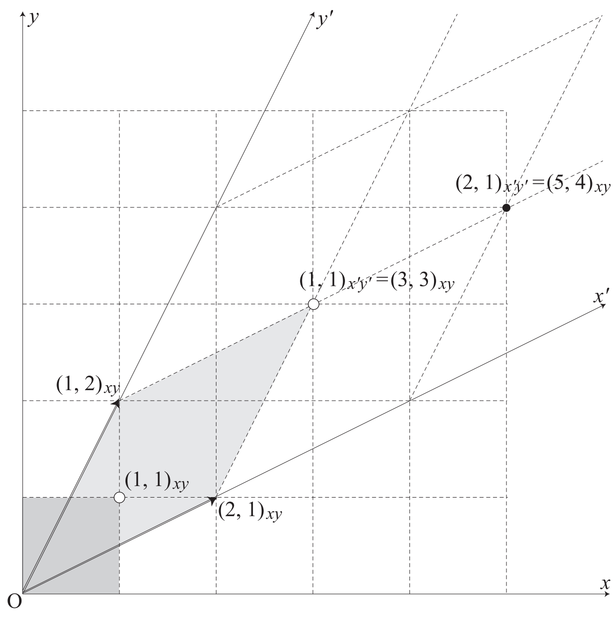
この斜交座標平面における座標を直交 xy 座標と区別して，$(a,\ b)_{x'y'}$ と表せば，(3.11) は，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{xy} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{x'y'} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{xy} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{x'y'} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

と表すことができる．この対応 $(1,\ 1)_{xy} \xrightarrow{T} (1,\ 1)_{x'y'}$ が意味するのは，変換によって xy 座標平面全体が歪められ，xy 座標平面上の点 (1, 1) も平面自体の変形と共に点 $(1,\ 1)_{x'y'}$ に移動する (ように見える)．この移動後の点を元の xy 座標で読み取り，$(3,\ 3)_{xy}$ と表したのものが像の座標である．更に，xy 座標平面上の単位正方形は，基本ベクトル (1, 0), (0, 1) の像のベクトル (2, 1), (1, 2) の張る平行四辺形に移るので，平面上の任意の図形はその面積が，

$$\left|\det.\mathbf{M}\right| = \left|2\times 2 - 1\times 1\right| = 3 \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

の倍率で拡大 (あるいは縮小) される．面積の倍率 $|\det.\mathbf{M}|$ は**非正則変換**においても意味を持つ．即ち，非正則変換では，すべての図形が直線または線分に潰れてしまうので，その面積 S は $S\times|\det.\mathbf{M}| = S\times 0 = 0$ となる．



【Review 15.3.1】 90 法政大

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が 2 点間の距離を変えない 1 次変換であるとき，a, b, c, d の関係式を求めよ．
また，$ad-bc$ の値を求めよ．

[答] $a^2+c^2=b^2+d^2=1,\ ab+cd=0,\ ad-bc=\pm1$

【Review 15.3.2】

(1) $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$ {}^t\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} $$

を $\mathbf{M}$ の**転置行列**という．このとき，

$$ {}^t\mathbf{M}\times\mathbf{M}=\mathbf{E} \iff \mathbf{M}^{-1}={}^t\mathbf{M} $$

を満たす $\mathbf{M}$ は，回転移動を表す行列または対称移動を表す行列に限ることを示せ．
ここで，対称移動とは，原点を通るある直線に関する対称移動を意味するものとする．
(2) 平面上の任意のベクトルを $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ で表すとき，

$$ {}^t\mathbf{M}\times\mathbf{M}=\mathbf{E} \iff \mathbf{Mu}\cdot\mathbf{Mv}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} $$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ の内積を表すものとする．

[証明略]

【Review 15.3.3】 81 東大

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ として，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\mathbf{M}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置く．
実数 a に対して，xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と点 $(a,\ 0)$ との距離を d_n とする．
すべての正整数 n に対して，$d_{n+1}>d_n$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

[答] $-6<a<\dfrac{12}{5}$

[Note] ${}^t\mathbf{M}\times\mathbf{M}=\mathbf{M}\times{}^t\mathbf{M}=\mathbf{E}$ を満たす $\mathbf{M}$ を**正規直交行列**という．
正規直交行列 $\mathbf{M}$ の表す 1 次変換 T に対して，次の事実はすべて同値である．

- $\mathbf{M}$ は回転行列または対称行列
- T によって 2 点間の距離は不変
- T によってベクトルの内積は不変

この観点から上の [Review 15.3.1] と [Review 15.3.2] を検討せよ．