【Example 16.1】 93 東洋大

1 次変換 T の表現行列を

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

で与えるとき，T による不動直線の個数を a の値で分類して調べよ.
また，不動直線が 2 本存在するとき，それらの直線が直交するような a の値を求めよ.

Point (**不動直線 · 不変直線**)

1 次変換 T による直線 $\mathfrak{L}$ の像が $\mathfrak{L}$ 自身であるとき，$\mathfrak{L}$ を T の**不動直線**という．即ち，$T(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$
また，T による直線 $\mathfrak{L}$ の像の点が常に $\mathfrak{L}$ 上にあるとき，$\mathfrak{L}$ を T の**不変直線**という．即ち，$T(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L}$

【解説】

変換 T の正則性を調べる.

$$\text{det.}\mathbf{M} = a - (1-a)(a-2) = (a-1)^2 + 1 > 0 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

より，T は正則であり，平面上のすべての点が移る原点通過直線は存在しない.
次に，T により方向を変えないベクトルについて考える．即ち，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

を満たすベクトル (x, y) の個数，即ち，固有ベクトルの個数は固有値の個数に対応するので，
固有方程式

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a^2 - 2a + 2) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

の判別式 D に注目して，

$$\mathrm{D} = (a+1)^2 - 4(a^2 - 2a + 2) = -(a-1)(3a-7) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

より，

$$\begin{cases} a < 1 \vee \dfrac{7}{3} < a & \cdots\cdots \text{ 固有ベクトル 0 個} \\ a = 1 \vee a = \dfrac{7}{3} & \cdots\cdots \text{ 固有ベクトル 1 個} \\ 1 < a < \dfrac{7}{3} & \cdots\cdots \text{ 固有ベクトル 2 個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

• $a < 1 \vee \dfrac{7}{3} < a$ の場合; 固有ベクトルは存在せず，**不動直線は存在しない**.
• $a = 1$ の場合;
まず，$x = \alpha$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - t \\ t \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

このとき，像の点 (1.6) は直線 $x = \alpha$ 上に固定されないので，$x = \alpha$ 型の**不動直線は存在しない**.
次に，$y = mx + n$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-m)t - n \\ mt+n \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

このとき，像の点 (1.7) が直線 $y = mx + n$ 上にあるとして，

$$mt + n = m\big((1-m)t - n\big) + n \quad (\forall t) \iff m^2t + mn = 0 \quad (\forall t) \iff m = 0 \ \land \ \forall n \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

即ち，$y = n$ $(\forall n)$ なる**不動直線が無数に存在する**.

• $a = \dfrac{7}{3}$ の場合;

まず，$x = \alpha$ 型の不動直線を調べる.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7\alpha + t \\ -4\alpha + 3t \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

このとき，像の点 (1.9) は直線 $x = \alpha$ 上に固定されないので，$x = \alpha$ 型の**不動直線は存在しない**.

次に，$y = mx + n$ 型の不動直線を調べる.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt + n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (m+7)t + n \\ (3m-4)t + 3n \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

このとき，像の点 (1.10) が直線 $y = mx + n$ 上にあるとして，

$$\frac{1}{3}(3m-4)t + n = m \times \frac{1}{3}(m+7)t + m \times \frac{1}{3}n + n \quad (\forall t)$$
$$\iff (m+2)^2t + mn = 0 \quad (\forall t) \iff m = -2 \ \land \ n = 0 \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

即ち，$y = -2x$ なる**不動直線が唯一存在する**.

• $1 < a < \dfrac{7}{3}$ の場合;

まず，$x = \alpha$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix} a & a-2 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + (a-2)t \\ (1-a)\alpha + t \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

$a = 2 \ \land \ \alpha = 0$ のときに限り，$x = 0$ なる**不動直線が唯一存在する**.

次に，$y = mx + n$ 型の不動直線を調べる.

$$\begin{pmatrix} a & a-2 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + (a-2)m)t + (a-2)n \\ (1-a)t + mt + n \end{pmatrix} \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

このとき，像の点 (1.13) が直線 $y = mx + n$ 上にあるとして，

$$(1 - a + m)t + n = m(a + (a-2)m)t + (a-2)mn + n \quad (\forall t)$$
$$\iff \big((a-2)m^2 + (a-1)m + a - 1\big)t + (a-2)mn = 0 \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) において，$a = 2$ とすると，

$$(m+1)t = 0 \quad (\forall t) \iff m = -1 \ \land \ \forall n \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

即ち，$y = -x + n$ $(\forall n)$ なる**不動直線が無数に存在する**.

(1.14) において，$a \neq 2$ とすると，

$$(a-2)m^2 + (a-1)m + a - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

ここで，(1.16) の判別式を D とすると，

$$\mathrm{D} = (a-1)^2 - 4(a-1)(a-2) = -(a-1)(3a-7) > 0 \quad \left(\because\ 1 < a < \frac{7}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

このとき，(1.16) の実数解を求めて，

$$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{-(a-1)(3a-7)}}{2(a-2)} \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

即ち，(1.18) の m の値を傾きとする $y = mx$ なる**不動直線が** 2 **本存在する**.
更に，その 2 本の不動直線が直交するのは，(1.16) の実数解を m_1, m_2 として，

$$m_1 \times m_2 = \frac{a-1}{a-2} = -1 \iff a = \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

このとき，2 本の直交不動直線は，

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

以上の議論をまとめて，

$$\begin{cases} a < 1 \ \vee \ \dfrac{7}{3} < a & \cdots\cdots \quad \textbf{不動直線なし} \ (0\ \textbf{個}) \\ a = 1 & \cdots\cdots \quad y = c \ (\forall c) \ (\textbf{無数}) \\ a = 2 & \cdots\cdots \quad y = -x + c \ (\forall c) \ (\textbf{無数}), \quad x = 0 \ (1\ \textbf{個}) \\ a = \dfrac{7}{3} & \cdots\cdots \quad y = -2x \quad (1\ \textbf{個}) \\ 1 < a < \dfrac{7}{3} \wedge a \neq 2 & \cdots\cdots \quad y = \dfrac{-(a-1) \pm \sqrt{-(a-1)(3a-7)}}{2(a-2)}x \quad (2\ \textbf{個}) \\ \text{esp. } a = \dfrac{3}{2} & \cdots\cdots \quad y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x \quad (2\ \textbf{個}) \end{cases}$$

【Review 16.1.1】 88 大阪市大

平面上の 1 次変換 T は点 $(1,\ 1)$ をその点自身に移し，点 $(0,\ 1)$ を直線 $y = x + 1$ 上の点に移す.
このとき，T による不動直線をすべて求めよ.

[答] $y = x + c \ (\forall c)$

【Review 16.1.2】 92 熊本大

行列 $\begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換による不動直線の個数を k の値で分類して調べよ.

[答]
$$\begin{cases} k < -1 & \cdots\cdots \quad 0\ \text{個} \\ k = -1 \vee k = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} & \cdots\cdots \quad 1\ \text{個} \\ k > -1 \wedge k \neq 0 \wedge k \neq 3 \wedge k \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} & \cdots\cdots \quad 2\ \text{個} \\ k = 0 \vee k = 3 & \cdots\cdots \quad \text{無数} \end{cases}$$

— 不動点 · 不動直線 —

1 次変換 T によって移動しない点を**不動点**という．即ち，

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff (\mathbf{M}-\mathbf{E})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a-1 & b\\ c & d-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}(a-1)x+by=0\\ cx+(d-1)y=0\end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

を満たす点 $(x,\,y)$ のことである．明らかに，原点 $(0,\,0)$ は不動点である．
このとき，原点以外の不動点 $(x,\,y)\neq(0,\,0)$ が存在するための必要十分条件は，
連立方程式 (1) が**非自明解**を持つことであり，即ち，次の各条件と同値である，

$$\mathrm{det}.(\mathbf{M}-\mathbf{E})=0 \iff \mathrm{det}.\mathbf{M}-\mathrm{trace}.\mathbf{M}-1=0 \iff \mathbf{M} \text{ が 1 を}\textbf{固有値}\text{に持つ}$$

ここで，固有値 $'1'$ に対応する固有ベクトルを $(x_0,\,y_0)$ と表せば，(1) より，

$$\begin{cases}(a-1)x_0+by_0=0\\ cx_0+(d-1)y_0=0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-b\\a-1\end{pmatrix},\ t\begin{pmatrix}d-1\\-c\end{pmatrix}\ (\forall t\neq 0) \quad \cdots\cdots(2)$$

(2) における 2 個のベクトル $(-b,\,a-1)$, $(d-1,\,-c)$ は平行であり，
(2) を方向ベクトルとする原点を通る直線上の点はすべて不動点となる．即ち，

不動点の集合としての不動直線が存在する

何故なら，その直線上の任意の点を $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\ (\forall t\neq 0) \implies T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\mathbf{M}\cdot t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\mathbf{M}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots\cdots(3)$$

即ち，P の T による像が P 自身となる．
一般に，実数の固有値 $\lambda\neq 1$ に対応する固有ベクトルを $(x_0,\,y_0)$ とするとき，

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{E})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}(a-\lambda)x_0+by_0=0\\ cx_0+(d-\lambda)y_0=0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-b\\a-\lambda\end{pmatrix},\ t\begin{pmatrix}d-\lambda\\-c\end{pmatrix}\ (\forall t\neq 0) \quad \cdots\cdots(4)$$

より，(4) を方向ベクトルとする原点を通る直線上の点はすべて同一直線上に移る．

$$\because\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\ (\forall t\neq 0) \implies T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\mathbf{M}\cdot t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\mathbf{M}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=t\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (\lambda\neq 1) \quad \cdots\cdots(5)$$

即ち，**原点を通る不動直線**が存在する．(不動点の集合ではない !!)
以上をまとめると，

原点通過不動直線の存在 $\iff$ **実数の固有値の存在**

以降，固有値の値で分類した不動直線の方程式を調べる．
その際，$\mathbf{M}$ の実数の固有値を λ_1, λ_2 で表すことにする．

■ $\lambda_j \neq 0 \wedge \lambda_j \neq 1\ (j=1,2)$ の場合

$$\left(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{E}\right)\begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \wedge\ \begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-b\\a-\lambda_j\end{pmatrix},\ t\begin{pmatrix}d-\lambda_j\\-c\end{pmatrix}\ (\forall t\neq 0)\quad (j=1,2)\qquad\cdots\cdots(6)$$

より，λ_1, λ_2 に対応する原点通過不動直線はそれぞれ

$$\begin{cases}(a-\lambda_1)x+by=0 & \cdots\cdots(7)\\ cx+(d-\lambda_1)y=0 & \cdots\cdots(8)\end{cases}\ \vee\ \begin{cases}(a-\lambda_2)x+by=0 & \cdots\cdots(9)\\ cx+(d-\lambda_2)y=0 & \cdots\cdots(10)\end{cases}$$

ここで，(7), (8) は同一の直線を表し，(9), (10) は同一の直線を表すことに注意.

• $bc\neq 0$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases}(a-\lambda_1)x+by=0 & \left(cx+(d-\lambda_1)y=0\right) & \left(\because\ (7)\equiv(8)\right)\\ (a-\lambda_2)x+by=0 & \left(cx+(d-\lambda_2)y=0\right) & \left(\because\ (9)\equiv(10)\right)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(11)$$

特に，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ のとき，原点通過不動直線は 1 本となり,

$$(a-\lambda_0)x+by=0\quad\left(cx+(d-\lambda_0)y=0\right)\qquad\cdots\cdots(12)$$

• $b=0\ \wedge\ c\neq 0$ のとき，固有方程式の解と係数の関係により,

$$a+d=\lambda_1+\lambda_2\ \wedge\ ad=\lambda_1\lambda_2 \iff (a,\,d)=(\lambda_1,\,\lambda_2)\ \vee\ (a,\,d)=(\lambda_2,\,\lambda_1)\qquad\cdots\cdots(13)$$

$\star$ $(a,\,d)=(\lambda_1,\,\lambda_2)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases}cx+(d-a)y=0 & \left(\because\ (8)\right)\\ x=0 & \left(\because\ (9)\equiv(10)\right)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(14)$$

$\star$ $(a,\,d)=(\lambda_2,\,\lambda_1)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases}cx+(d-a)y=0 & \left(\because\ (10)\right)\\ x=0 & \left(\because\ (7)\equiv(8)\right)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(15)$$

特に，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ のとき，原点通過不動直線は 1 本となり,

$$x=0\quad\left(\because\ (8)\equiv(10)\right)\quad\left(\because\ a=d=\lambda_0\right)\qquad\cdots\cdots(16)$$

• $b\neq 0\ \wedge\ c=0$ のとき，(13) により，$(a,\,d)=(\lambda_1,\,\lambda_2),\,(\lambda_2,\,\lambda_1)$

$\star$ $(a,\,d)=(\lambda_1,\,\lambda_2)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases}(a-d)x+by=0 & \left(\because\ (9)\right)\\ y=0 & \left(\because\ (7)\equiv(8)\right)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(17)$$

$\star$ $(a,\,d)=(\lambda_2,\,\lambda_1)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases}(a-d)x+by=0 & \left(\because\ (7)\right)\\ y=0 & \left(\because\ (9)\equiv(10)\right)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(18)$$

特に，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ のとき，原点通過不動直線は 1 本となり,

$$y=0\quad\left(\because\ (7)\equiv(9)\right)\quad\left(\because\ a=d=\lambda_0\right)\qquad\cdots\cdots(19)$$

● $b=c=0$ のとき，(13) により，$(a,\ d)=(\lambda_1,\ \lambda_2),\ (\lambda_2,\ \lambda_1)$
⋆ $(a,\ d)=(\lambda_1,\ \lambda_2)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases} x=0 & (\because\ (9)) \\ y=0 & (\because\ (8)) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(20)$$

⋆ $(a,\ d)=(\lambda_2,\ \lambda_1)$ のとき，2 本の原点通過不動直線の方程式は,

$$\begin{cases} x=0 & (\because\ (7)) \\ y=0 & (\because\ (10)) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(21)$$

特に，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ のとき,

$$\mathbf{M}=\lambda_0\mathbf{E} \quad \left(\because\ a=d=\lambda_0\neq 0,\ \neq 1\right)$$

このとき，原点を通る任意の直線が不動直線であることは明らか.

■ $\lambda_1=1 \wedge \lambda_2\neq 1 \wedge \lambda_2\neq 0$ の場合
(6) より，$\lambda_1=1,\ \lambda_2$ に対応する原点通過不動直線はそれぞれ

$$\begin{cases}(a-1)x+by=0 & \cdots\cdots(22)\\ cx+(d-1)y=0 & \cdots\cdots(23)\end{cases} \vee \begin{cases}(a-\lambda_2)x+by=0 & \cdots\cdots(24)\\ cx+(d-\lambda_2)y=0 & \cdots\cdots(25)\end{cases} \quad \left(\lambda_2\neq 1 \wedge \lambda_2\neq 0\right)$$

ここで，(22), (23) は同一の直線を表し，(24), (25) は同一の直線を表すことに注意.
• $bc\neq 0$ のとき，
不動直線 $(22)\equiv(23)$ 上の点はすべて**不動点**であり，その直線上に任意に点 $(x_0,\ y_0)\neq(0,\ 0)$ をとれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \quad (\forall t:\text{実数}) \qquad \cdots\cdots(26)$$

なるベクトル方程式で表される直線 (26) 上の任意の点 P に対して，その像の点を Q とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\mathbf{M}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\mathbf{M}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(27)$$

即ち，$(x_0,\ y_0)\neq(0,\ 0)$ を通り，$(x_2,\ y_2)$ を方向ベクトルとする直線 (26) は**原点不通過不動直線**である.
これらをまとめて表せば，

$$\begin{cases}(a-1)x+by=0 \quad \left(cx+(d-1)y=0\right) & \left(\because\ (22)\equiv(23)\right) \quad (\textbf{不動点の集合})\\ (a-\lambda_2)x+by+r=0 \quad \left(cx+(d-\lambda_2)y+r=0\right) & \left(\because\ (24)\equiv(25)\right) \quad (\forall r:\text{実数})\end{cases} \qquad \cdots\cdots(28)$$

• $b=0 \wedge c\neq 0$ のとき，固有方程式の解と係数の関係により，

$$a+d=1+\lambda_2 \ \wedge\ ad=1\times\lambda_2 \iff (a,\ d)=(1,\ \lambda_2) \ \vee\ (a,\ d)=(\lambda_2,\ 1) \qquad \cdots\cdots(29)$$

⋆ $(a,\ d)=(1,\ \lambda_2)$ のとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}cx+(d-1)y=0 & \left(\because\ (23)\right) \quad (\textbf{不動点の集合})\\ x=r & \left(\because\ (24)\equiv(25)\right) \quad (\forall r:\text{実数})\end{cases} \qquad \cdots\cdots(30)$$

⋆ $(a,\ d)=(\lambda_2,\ 1)$ のとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}cx+(1-a)y+r=0 & \left(\because\ (25)\right) \quad (\forall r:\text{実数})\\ x=0 & \left(\because\ (22)\equiv(23)\right) \quad (\textbf{不動点の集合})\end{cases} \qquad \cdots\cdots(31)$$

• $b\neq 0 \wedge c=0$ のとき，(29) により，$(a,\ d)=(1,\ \lambda_2),\ (\lambda_2,\ 1)$
⋆ $(a,\ d)=(1,\ \lambda_2)$ のとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}(1-d)x+by+r=0 & \left(\because\ (24)\right) \quad (\forall r:\text{実数})\\ y=0 & \left(\because\ (22)\equiv(23)\right) \quad (\textbf{不動点の集合})\end{cases} \qquad \cdots\cdots(32)$$

⋆ $(a,\ d)=(\lambda_2,\ 1)$ のとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}(a-1)x+by=0 & \left(\because\ (22)\right) \quad (\textbf{不動点の集合})\\ y=r & \left(\because\ (24)\equiv(25)\right) \quad (\forall r:\text{実数})\end{cases} \qquad \cdots\cdots(33)$$

● $b=c=0$ のとき，(29) により，$(a,\ d)=(1,\ \lambda_2),\ (\lambda_2,\ 1)$
⋆ $(a,\ d)=(1,\ \lambda_2)$ のとき，不動直線の方程式は,

$$\begin{cases} y=0 & \left(\because\ (23)\right) \quad (\textbf{不動点の集合}) \\ x=r & \left(\because\ (24)\right) \quad (\forall r:\text{実数}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(34)$$

⋆ $(a,\ d)=(\lambda_2,\ 1)$ のとき，不動直線の方程式は,

$$\begin{cases} x=0 & \left(\because\ (22)\right) \quad (\textbf{不動点の集合}) \\ y=r & \left(\because\ (25)\right) \quad (\forall r:\text{実数}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(35)$$

■ $\lambda_1=\lambda_2=1$ の場合

(6) より，$\lambda_1=\lambda_2=1$ に対応する原点通過不動直線は，

$$\begin{cases}(a-1)x+by=0 & \cdots\cdots(36)\\ cx+(d-1)y=0 & \cdots\cdots(37)\end{cases}$$

ここで，(36), (37) は同一の直線を表すことに注意.

• $bc\neq 0$ のとき，

不動直線 (36) $\equiv$ (37) 上の点はすべて**不動点**であり，

その直線上にない任意の点 $(x_0,\,y_0)\overset{\text{put}}{=}\mathrm{Q}$ をとり，その像の点を R とすれば，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\mathbf{M}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=(\mathbf{M}-\mathbf{E})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-1 & b\\ c & d-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & b\\ -\dfrac{1}{b}(a-1)^2 & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\\&=-\frac{(a-1)x_0+by_0}{b}\begin{pmatrix}-b\\a-1\end{pmatrix}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(38)$$

(38) において，固有方程式の解と係数の関係

$$a+d=\lambda_1+\lambda_2=2\ \wedge\ ad-bc=\lambda_1\times\lambda_2=1\iff d=2-a\ \wedge\ c=-\frac{1}{b}(a-1)^2\ \left(\because\ b\neq 0\right)\qquad\cdots\cdots(39)$$

を用いており，(36) により，$(-b,\,a-1)$ が固有値 1 に対応する固有ベクトルであることに注意すれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\ /\!/\ \begin{pmatrix}-b\\a-1\end{pmatrix}\quad\left(-\frac{(a-1)x_0+by_0}{b}\neq 0\right)\qquad\cdots\cdots(40)$$

により，**原点不通過不動直線**の方程式は，

$$(a-1)x+by+r=0\quad\Big(cx+(d-1)y+r=0\Big)\quad(\forall r\neq 0)\qquad\cdots\cdots(41)$$

これらをまとめて表せば，

$$\begin{cases}(a-1)x+by=0\quad\Big(cx+(d-1)y=0\Big)\quad\left(\because\ (36)\equiv(37)\right)\quad(\textbf{不動点の集合})\\ (a-1)x+by+r=0\quad\Big(cx+(d-1)y+r=0\Big)\quad\left(\because\ (36)\equiv(37)\right)\quad(\forall r:\text{実数})\end{cases}\qquad\cdots\cdots(42)$$

• $b=0\ \wedge\ c\neq 0$ のとき，固有方程式の解と係数の関係により，

$$a+d=\lambda_1+\lambda_2=2\ \wedge\ ad=\lambda_1\times\lambda_2=1\iff a=d=1\qquad\cdots\cdots(43)$$

このとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}x=0\quad\left(\because\ (37)\right)\quad(\textbf{不動点の集合})\\ x=r\quad\left(\because\ (41)\right)\quad(\forall r:\text{実数})\end{cases}\qquad\cdots\cdots(44)$$

• $b\neq 0\ \wedge\ c=0$ のとき，(43) により，$a=d=1$

このとき，不動直線の方程式は，

$$\begin{cases}y=0\quad\left(\because\ (36)\right)\quad(\textbf{不動点の集合})\\ y=r\quad\left(\because\ (41)\right)\quad(\forall r:\text{実数})\end{cases}\qquad\cdots\cdots(45)$$

• $b=c=0$ のとき，(43) により，$a=d=1$

$$\therefore\ \mathbf{M}=\mathbf{E}$$

このとき，平面内の任意の直線が不動点の集合としての不動直線であることは明らか.

以上で固有値による不動直線の分類が尽くされた.

【Example 16.2.1】

平面上の 1 次変換 T が三角形の頂点 A, B, C を

$$T(\mathrm{A})=\mathrm{B},\quad T(\mathrm{B})=\mathrm{C},\quad T(\mathrm{C})=\mathrm{A} \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

のように移すとき，三角形 ABC の重心 G は不動点であることを示せ.
また，G は原点 O に一致することを示せ.

Point (線型性)

1 次変換 T と実数 s, t に対して，

$$T(s\vec{u}+t\vec{v})=sT(\vec{u})+tT(\vec{v})$$

ただし，$\vec{u}$, $\vec{v}$ は平面上で 1 次独立である.

【解説】

線型性と (2.1.1) により，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)=\frac{1}{3}\left\{T\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+T\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+T\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OG}} \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

即ち，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OG}} \iff T(\mathrm{G})=\mathrm{G} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

従って，重心 G は不動点である.
次に，3 点 A, B, C は三角形の頂点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ は平面上互いに 1 次独立であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}=s\overrightarrow{\mathrm{GA}}+t\overrightarrow{\mathrm{GB}}+u\overrightarrow{\mathrm{GC}} \ \wedge\ s+t+u=1 \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

を満たす実数 s, t, u が存在する.
このとき，(2.1.4) の両辺に T を作用させて，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)=sT\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)+tT\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)+uT\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) \iff \overrightarrow{\mathrm{GO}}=s\overrightarrow{\mathrm{GB}}+t\overrightarrow{\mathrm{GC}}+u\overrightarrow{\mathrm{GA}} \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

更に，(2.1.5) の両辺に T を作用させて，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)=sT\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)+tT\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)+uT\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right) \iff \overrightarrow{\mathrm{GO}}=s\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GA}}+u\overrightarrow{\mathrm{GB}} \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

(2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) の辺々を加えて，

$$3\overrightarrow{\mathrm{GO}}=(s+t+u)\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=1\times\vec{0} \iff \mathrm{G}=\mathrm{O} \qquad \cdots\cdots(2.1.7)$$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \iff \overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

を用いた.

【Example 16.2.2】

平面上の 1 次変換 T に対して，原点以外の不動点 P が存在するとき，
直線 $\mathfrak{L}$ の T による像の直線 $T(\mathfrak{L})$ と $\mathfrak{L}$ との交点 Q は T による不動点であることを示せ.

【解説】

P は不動点であるから，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

T の線型性により，任意の実数 λ に対して，

$$T\left(\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \lambda\,T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

従って，2 点 O, P を通る直線 $\mathfrak{g}$ 上の点はすべて不動点である.
即ち，$\mathfrak{g}$ は**不動点の集合としての不動直線**である.

(1) $\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{g}$ が交わる場合;
$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{g}$ の交点を Q と表せば，Q は $\mathfrak{g}$ 上の点であるから，

$$T\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \iff T(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q} \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

ここで，Q は $\mathfrak{L}$ 上の点でもあり，(2.2.3) により，$T(\mathfrak{L})$ 上の点でもある.
従って，$\mathfrak{L}$, $T(\mathfrak{L})$ の交点は，$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{g}$ の交点 Q であり，題意は成立する.

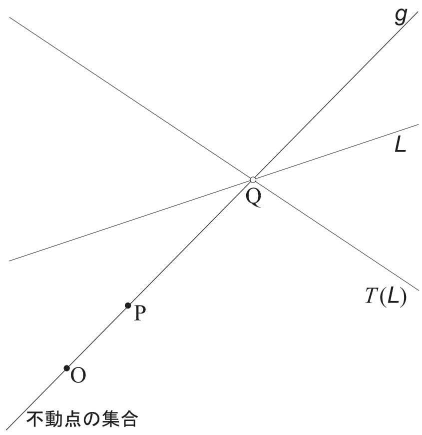
(2) $\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{g}$ が交わらない場合; 即ち，$\mathfrak{L} \mathbin{/\!/} \mathfrak{g}$ の場合;
$\mathfrak{L}$ の方向ベクトル $\overrightarrow{d}$ は $\mathfrak{g}$ と平行であり，$\overrightarrow{d} = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せるので，

$$T(\overrightarrow{d}\,) = T\left(\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \lambda\,T\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{d} \iff T(\overrightarrow{d}\,) = \overrightarrow{d} \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

ここで，$T(\overrightarrow{d}\,)$ は直線 $T(\mathfrak{L})$ の方向ベクトルであり，(2.2.4) より，

$$\mathfrak{L} \mathbin{/\!/} T(\mathfrak{L}) \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

このとき，$\mathfrak{L}$, $T(\mathfrak{L})$ は交点 Q を持たないので，この場合は議論する必要がない.
以上より，原点以外の不動点 P が存在するとき，$\mathfrak{L}$, $T(\mathfrak{L})$ の交点 Q は不動点である.



Comment

ベクトル, **複素数**, **行列**でも経験したように, 変換行列の成分を用いない (表に出さない) 計算は本質的に難しい. 成分計算では煩雑になる抽象的問題を処理する手段としての (例題のような) 代数的計算は相応の慣れが必要である. 東大, 京大ではこの種の問題を出題してきた経緯があるので留意されたい. 一般に入試では, 1 次変換の**線型性**, 即ち, **比を保存する**と云う性質が出題され易いので, 不動点, 不動直線と並んで「比」をテーマとする問題にも目を通しておきたい.

【Review 16.2.1】

xy 平面上に原点 O を頂点とする三角形 OAB があり, この平面上の 1 次変換 T に対して,

$$T(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \ \wedge \ T(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$$

が成り立っている. この平面上の任意の点 P の像を Q とするとき, 次の各問いに答えよ.

(1) Q は直線 OB 上にあることを示せ.　(2) P が直線 OB 上にないとき, PQ // AB であることを示せ.

[証明略]

【Review 16.2.2】

平面上の 1 次変換 T と 1 次独立な $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ に対して,

$$T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \ \wedge \ T(\overrightarrow{v}) = \lambda\, \overrightarrow{u}$$

が成り立つとき, T による原点を通る不変直線の個数を λ の値で分類して調べよ.

[答] $\lambda > 0 \cdots 2$ 個, $\lambda = 0 \cdots 1$ 個, $\lambda < 0 \cdots 0$ 個

【Review 16.2.3】 90 京大

平面上に 2 円 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ があり, 1 次変換 T は $\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{C}'$ に移す. ただし, T は逆変換 T^{-1} を持つとする. $\mathfrak{L}$ が $\mathfrak{C}$ 上の点 P における接線であるとき, $\mathfrak{L}' = T(\mathfrak{L})$ は $T(\mathrm{P})$ における $\mathfrak{C}'$ の接線であることを示せ. また, A を $\mathfrak{C}$ の中心とするとき, $T(\mathrm{A})$ は $\mathfrak{C}'$ の中心であることを示せ.

[証明略]

【Example 16.3】 92 九州芸工大

xy 平面上の 2 次曲線

$$x^2+2axy+y^2+2x-8y+b=0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を適当に平行に移動し，原点中心に角 θ 回転して得られる曲線が

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

であるとき，$a,\ b,\ \theta\ \left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

【解説】

表現行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

の 2 次曲線 (3.1) を標準化した曲線が

$$5x^2-3y^2-15=0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

であるから，$\mathbf{M}$ の固有値は

$$\lambda_1=5,\ \ \lambda_2=-3 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

と考えられ,

$$\begin{cases}\text{trace.}\mathbf{M}=\lambda_1+\lambda_2=5+(-3)=2\\ \text{det.}\mathbf{M}=\lambda_1\lambda_2=5\times(-3)=-15\end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

より，det..$\mathbf{M}$ に関して,

$$1-a^2=-15 \iff a=\pm4 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

• $a=4$ の場合; $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

と表され，$\mathbf{M}$ を標準化する回転行列 $\mathbf{P}$ は,

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

このとき，回転角 θ は,

$$\theta=-\frac{\pi}{4}<0 \quad (\textbf{不適}) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

• $a=-4$ の場合; $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

と表され，$\mathbf{M}$ を標準化する回転行列 $\mathbf{P}$ は,

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

このとき，回転角 θ は,

$$0<\theta=\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

即ち，(3.1) を $\pi/4$ 回転し，平行移動したものが (3.2) であるから，$b=-14$.

$$\therefore\quad a=-4\ \wedge\ b=-14\ \wedge\ \theta=\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

Comment

方程式

$$ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0 \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

で表される曲線は，行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ {}^t\mathbf{N}=(p\ \ q),\ {}^t\mathbf{X}=(x\ \ y) \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

を用いて，

$$ {}^t\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}+{}^t\mathbf{N}\mathbf{X}+r=0 \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

と表せる．

このとき，$\mathbf{M}$ を対角化する 2 次行列で

$$ {}^t\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\ \left({}^t\mathbf{P}\times\mathbf{P}=\mathbf{P}\times{}^t\mathbf{P}=\mathbf{E}\right)\ \wedge\ \det.\mathbf{P}=1 \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

を満たす $\mathbf{P}$ により，変換

$$\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X}' \iff \mathbf{X}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

即ち，$\mathbf{X}'$ を回転行列 $\mathbf{P}$ で $\mathbf{X}$ に移す変換を与えれば，

$$ {}^t\mathbf{X}'\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}'+\left({}^t\mathbf{N}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}'+r=0 \qquad \cdots\cdots(3.19)$$

ここで，${}^t\mathbf{X}'=(x'\ \ y')$ と表せば，

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+p'x'+q'y'+r=0 \qquad \cdots\cdots(3.20)$$

の形式に帰着する．ここで，$(p'\ \ q')={}^t\mathbf{N}\mathbf{P}$ である．

[Note]　$\mathbf{P}$ を回転行列とできるのは，(3.17) の条件 ${}^t\mathbf{P}\times\mathbf{P}=\mathbf{E}$ により，**正規直交行列**で $\det.\mathbf{P}=1$ を満たす，という理由に依る．[Review 15.3.2] を参照せよ．

Point **(曲線の判別式)**

方程式 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ の表す図形は，

$$\det.\mathbf{M}>0 \cdots \textbf{楕円},\quad \det.\mathbf{M}=0 \cdots \textbf{放物線},\quad \det.\mathbf{M}<0 \cdots \textbf{双曲線}$$

と分類される**円錐曲線**である．

【Review 16.3.1】 95 神戸大

平面上の 2 次曲線

$$\mathfrak{C}: x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=0$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{C}$を原点中心に適当に回転することにより，放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ に変換せよ．

(2) $\mathfrak{C}$と直線 $-x+2y+6\sqrt{2}=0$ の囲む領域の面積を求めよ．

[答] (1) $a=1,\ b=2,\ c=0$ (2) $\dfrac{343}{6}$

【Review 16.3.2】 96 神戸大

平面上の 2 次曲線

$$\mathfrak{C}: 9x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=60$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{C}$を原点中心に適当に回転することにより，曲線 $ax^2+by^2=1$ に変換せよ．

(2) $\mathfrak{C}$上の点と点 $\left(c,\ -\sqrt{3}c\right)$ との距離の最小値が 2 であるとき，$c>0$ の値を求めよ．

[答] (1) $a=\dfrac{1}{10},\ b=\dfrac{1}{6}$ (2) $c=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$