【**Example 17.1.1**】 **– 包絡線定理 –**

曲線族 G = { F$(x,\,y,\,t)=0$} の各曲線に接する曲線を曲線族 G の**包絡線**といい,

$$\begin{cases} \mathrm{F}(x,\,y,\,t)=0 & \cdots\cdots(1.1) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)=0 & \cdots\cdots(1.2) \end{cases}$$

から t を消去して得られる $x,\,y$ の関係式

$$f(x,\,y)=0 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

で与えられる.

[註] 包絡線 (envelope)

【証明】

陰関数 (1.1) を x で微分して,

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)\cdot\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

ここで, (1.1) と包絡線との接点を

$$(x,\,y)=(u(t),\,v(t)) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

と表せば, (1.5) における両曲線の共通接線の傾きは,

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=\frac{v'(t)}{u'(t)} \quad \big(u'(t)\neq 0\big) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.4), (1.6) により, 接点 (1.5) において,

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)+\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)\cdot\frac{v'(t)}{u'(t)}=0$$
$$\iff \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)\cdot\frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}t}+\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)\cdot\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}t}=0 \quad \left(\because\ \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}t}=u'(t),\ \frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}t}=v'(t)\right) \qquad \cdots\cdots(1,7)$$

一方, (1.1) を t で微分して,

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)\cdot\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)\cdot\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t}+\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(x,\,y,\,t)=0 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

(1.7), (1.8) により, 接点 (1.5) において,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)=0 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

従って,

$$\mathrm{F}(u,\,v,\,t)=0\ \wedge\ \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(u,\,v,\,t)=0 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

から t を消去して得られる $u,\,v$ の関係式を $f(u,\,v)=0$ と表せば,
(1.3) が求める**包絡線の方程式**である.

[Note] (1.5) は**包絡線の媒介変数表示**になっていることに注意.

【別証】

曲線族 G の包絡線を 2 曲線

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ t) = 0 & \cdots\cdots(1.11) \\ F(x,\ y,\ t+\varepsilon) = 0 & \cdots\cdots(1.12) \end{cases} \quad (\varepsilon \simeq 0)$$

の交点の $\varepsilon \to 0$ なる極限の点の集合と解釈すれば，その交点 $(x,\ y) = (u,\ v)$ は,

$$F(x,\ y,\ t) = F(x,\ y,\ t+\varepsilon) \iff F(x,\ y,\ t+\varepsilon) - F(x,\ y,\ t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

なる方程式の解と考えられる.

(1.13) の解 $(u,\ v)$ に対して，$\varepsilon \to 0$ とすれば,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u,\ v,\ t+\varepsilon) - F(u,\ v,\ t)}{\varepsilon} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t}F(u,\ v,\ t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

従って，(1.11), (1.12) の解 $(u,\ v)$ は,

$$F(x,\ y,\ t) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial}{\partial t}F(x,\ y,\ t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

の解と同値であり，(1.15) から t を消去した $x,\ y$ の関係式が**包絡線の方程式**である.

【Review 17.1.1】

放物線族

$$y = tx - (1+t^2)x^2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

の包絡線の方程式を求めよ.

$$y = -x^2 + \frac{1}{4},\ (x,\ y) \neq \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$$

【Review 17.1.2】

楕円族

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1 \quad (0 < t < 1)$$

の包絡線の方程式を求めよ.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

【Example 17.1.2】

曲線族 $G = \{\, F(x,\, y,\, s,\, t) = 0 \mid G(s,\, t) = 0 \}$ の包絡線は,

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, t) = 0 & \cdots\cdots(1.16) \\ G(s,\, t) = 0 & \cdots\cdots(1.17) \\ \dfrac{\partial F}{\partial s}\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\partial G}{\partial s} = 0 & \cdots\cdots(1.18) \end{cases}$$

から $s,\, t$ を消去して得られる $x,\, y$ の関係式

$$f(x,\, y) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

として与えられる.

【証明】

(1.17) を s について解いて,

$$s = g(t) \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

このとき,

$$F(x,\, y,\, s,\, t) \overset{\text{put}}{=} H(x,\, y,\, t) \quad \left(\because\ s = g(t)\right) \qquad \cdots\cdots(1.21)$$

前々頁の議論により包絡線の方程式は,

$$H(x,\, y,\, t) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial}{\partial t}H(x,\, y,\, t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.22)$$

から t を消去して得られる.

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,\, y,\, t) = \frac{\partial}{\partial s}F(x,\, y,\, s,\, t)\cdot\frac{\mathbf{d}s}{\mathbf{d}t} + \frac{\partial}{\partial t}F(x,\, y,\, s,\, t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.23)$$

一方, (1.17) を t で微分して,

$$\frac{\partial}{\partial s}G(s,\, t)\cdot\frac{\mathbf{d}s}{\mathbf{d}t} + \frac{\partial}{\partial t}G(s,\, t) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.24)$$

(1.23), (1.24) より, $\dfrac{\mathbf{d}s}{\mathbf{d}t}$ を消去して,

$$\frac{\partial}{\partial s}F(x,\, y,\, s,\, t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}G(s,\, t) - \frac{\partial}{\partial t}F(x,\, y,\, s,\, t)\cdot\frac{\partial}{\partial s}G(s,\, t) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.25)$$

従って,

$$F(x,\, y,\, s,\, t) = 0 \ \wedge\ G(s,\, t) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.26)$$

から $s,\, t$ を消去して得られる $x,\, y$ の関係式 (1.19) が求める包絡線の方程式である.

[Note] $\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,\, y,\, t) = f_t(x,\, y,\, t)$ なる記法も可能である. 即ち,

$$(1.18) \iff F_s G_t - F_t G_s = 0$$

【Review 17.1.3】

媒介変数表示された曲線族

$$x = x(s,\ t),\ \ y = y(s,\ t) \qquad \cdots\cdots(1.27)$$

の包絡線の方程式は,

$$x = x(s,\ t)\ \wedge\ y = y(s,\ t)\ \wedge\ \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.29)$$

から $s,\ t$ を消去して得られる $x,\ y$ の関係式で表されることを示せ.

【Review 17.1.4】

$L > 0$ に対して, 直線族

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1 \quad \left(s^2 + t^2 = L^2\right)$$

の包絡線の方程式を求めよ.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$$

【Review 17.1.5】

$L > 0$ に対して, 曲線族

$$x^2 + y^2 + 2sx + 2ty = 0 \quad \left(s^2 + t^2 = L^2\right)$$

の包絡線の方程式を求めよ.

$$x^2 + y^2 = 4L^2$$

【Review 17.1.6】

放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ に対して, 放物線と線分 PQ の囲む面積が $\dfrac{1}{6}$ のとき, 線分族 PQ の包絡線の方程式を求めよ.

$$y = x^2 + \frac{1}{4}$$

【**Example 17.1.3**】 **– 包絡線としての円錐曲線 –**

F を定点，P を定直線 ℓ 上の動点とする．ただし，$\mathrm{F} \notin \ell$ とする．
線分 FP の垂直 2 等分線 $\mathfrak{L}$ の包絡線は，F を焦点，ℓ を準線とする**放物線**であることを示せ．

【解答】

定数 $p > 0$ に対して，

$$\mathrm{F}(p,\ 0), \quad \ell : x = -p \qquad \cdots\cdots(1.30)$$

として一般性を失わない．

ℓ 上の点 $\mathrm{P}(-p,\ t)$ $(-\infty < t < \infty)$ に対して，$\mathfrak{L}$ の方程式は，

$$\begin{pmatrix} 2p \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y - t/2 \end{pmatrix} = 0 \iff 2px - ty + \frac{1}{2}t^2 = 0 \qquad \left(\because \ \overrightarrow{\mathrm{PF}} = \begin{pmatrix} 2p \\ -t \end{pmatrix} \right) \qquad \cdots\cdots(1.31)$$

(1.31) の左辺を t で微分して，

$$-y + t = 0 \iff t = y \qquad \cdots\cdots(1.32)$$

(1.31), (1.32) より t を消去して，

$$2px - y^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0 \iff y^2 = 4px \qquad \cdots\cdots(1.33)$$

(1.33) は $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点，$\ell : x = -p$ を準線とする放物線である．

【**Review 17.1.7**】

F を定点，P を F′ を中心とする定円上の動点とするとき，線分 FP の垂直 2 等分線 $\mathfrak{L}$ の包絡線は，

- F が定円の**内点**のとき，F, F′を焦点とする**楕円**
- F が定円の**外点**のとき，F, F′を焦点とする**双曲線**

であることを示せ．

【**Example 17.2.1**】 – 曲率 –

曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点

$$\mathrm{P}(t,\ f(t)),\ \ \mathrm{Q}(t+\Delta t,\ f(t+\Delta t)) \quad (\Delta t > 0)$$

に対して，P, Q における 2 接線の方向角を θ, $\theta+\Delta\theta$ とし，曲線上の弧 PQ の弧長を $\Delta\ell$ とするとき，

$$\kappa = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\ell} = \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{d}\ell} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

によって定義される κ を点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の曲率という．

このとき，

$$\kappa = \frac{f''(t)}{\left(1+(f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

［註］ 曲率 (curvature)

【証明】

接線の方向角の定義により，

$$\tan\theta = f'(t),\ \ \tan(\theta+\Delta\theta) = f'(t+\Delta t) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

このとき，平均値の定理により，

$$\Delta\theta = \tan^{-1}(f'(t+\Delta t)) - \tan^{-1}(f'(t)) = \Delta t \times \frac{f''(t_1)}{1+(f'(t_1))^2} \quad \left(t < t_1 < t+\Delta t\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

一方，積分の平均値の定理により，

$$\Delta\ell = \int_t^{t+\Delta t}\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{d}x = \Delta t \times \left(1+(f'(t_2))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(t < t_2 < t+\Delta t\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.4), (2.5) により，

$$\kappa = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\ell} = \lim_{t_1,t_2\to t}\frac{f''(t_1)}{\left(1+(f'(t_1))^2\right)\left(1+(f'(t_2))^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f''(t)}{\left(1+(f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

即ち，(2.2) の成立が示された．

[Note] (2.4) における逆三角関数の微分に関して;

$$y = \tan x \iff x = \tan^{-1} y$$

であるから，逆関数の微分の定義により，

$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}y} = \frac{1}{\mathbf{d}y/\mathbf{d}x} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2} \iff \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}y}(\tan^{-1}y) = \frac{1}{1+y^2}$$

ここで，$y = f'(x)$ として，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\left(\tan^{-1}(f'(x))\right) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}f'(x)}\left(\tan^{-1}(f'(x))\right) \times \frac{\mathbf{d}f'(x)}{\mathbf{d}x} = \frac{1}{1+(f'(x))^2}\times f''(x) = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$$

【**Example 17.2.2**】 **– 曲率半径 · 曲率円 –**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲率を κ とするとき，$\dfrac{1}{|\kappa|}$ を**曲率半径**といい，
P において $y=f(x)$ に接する半径 $1/|\kappa|$ の円を**曲率円**という．このとき，曲率円の中心 $(x,\,y)$ は，

$$x=t-\frac{f'(t)\left(1+(f'(t))^2\right)}{f''(t)},\quad y=f(t)+\frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

によって与えられる．ここで，曲率円の中心を**曲率中心**という．

【証明】

$\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における $y=f(x)$ の接線方向のベクトル $(1,\ f'(t))$ により，
P における**単位法線ベクトル**は，

$$\frac{\pm1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}\begin{pmatrix}f'(t)\\-1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

ここで，$y=f(x)$ が下に凸 $(f''(x)>0)$ であれば，曲率円の中心は $y=f(x)$ の上側にあり，
法線ベクトルの y 成分は正．逆に，上に凸 $(f''(x)<0)$ であれば，法線ベクトルの y 成分は負．
上記の符号の違いと κ の符号を考慮して，曲率中心への位置ベクトルは，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\f(t)\end{pmatrix}+\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}\begin{pmatrix}f'(t)\\-1\end{pmatrix}\ \wedge\ \kappa=\frac{f''(t)}{\left(1+(f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\f(t)\end{pmatrix}-\frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}\begin{pmatrix}f'(t)\\-1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

即ち，(2.7) が導かれた．

【**Review 17.2.1**】

曲線 $y=x^2$ の曲率半径の最小値を求めよ．また，曲率半径を最小にするときの曲率中心を求めよ．

最小値 : $\dfrac{1}{2}$，曲率中心 : $(0,\ 1/2)$

【**Review 17.2.2**】

曲線 $y=\log x$ の曲率半径の最小値を求めよ．また，曲率半径を最小にするときの曲率中心を求めよ．

最小値 : $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，曲率中心 : $\left(2\sqrt{2},\ -\dfrac{3+\log 2}{2}\right)$

【**Review 17.2.3**】

双曲線 $xy=1$ の曲率半径の最小値を求めよ．また，曲率半径を最小にするときの曲率中心を求めよ．

最小値 : $\sqrt{2}$，曲率中心 : $(\pm2,\ \pm2)$ (複号同順)

【**Review 17.2.4**】

媒介変数 t で表示された曲線

$$x = u(t),\ \ y = v(t)$$

の曲率 κ, 曲率中心は次式で与えられる.

$$\kappa = \frac{u'v'' - u''v'}{\left((u')^2 + (v')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{(u')^2 + (v')^2}{u'v'' - u''v'} \begin{pmatrix} -v' \\ u' \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) の成立を示せ.

【**Example 17.3.1**】 **– 縮閉線 –**

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲率中心を Q とする．
$y = f(x)$ 上の P の移動に伴う曲率中心 Q の軌跡を $y = f(x)$ の**縮閉線**という．
$f(x) = x^2$ のとき，公式 (2.7) を用いて，放物線 $y = x^2$ の縮閉線の方程式を求めよ．

［註］ 縮閉線 (evolute)

【解答】 **– 曲率中心の軌跡 –**

$f(t) = t^2$ のとき，

$$f'(t) = 2t,\ \ f''(t) = 2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を曲率中心の公式

$$x = t - \frac{f'(t)\bigl(1 + (f'(t))^2\bigr)}{f''(t)}, \quad y = f(t) + \frac{1 + (f'(t))^2}{f''(t)} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

に代入して，

$$x = t - \frac{2t(1 + (2t)^2)}{2} = -4t^3, \quad y = t^2 + \frac{1 + (2t)^2}{2} = 3t^2 + \frac{1}{2} \iff x = -4t^3 \ \wedge\ y = 3t^2 + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) より t を消去して，

$$y = 3\left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \iff \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}x^2 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

即ち，(3.3) が縮閉線の方程式である．

【別解】 **– 法線の包絡線 –**

$y = f(x)$ の P における法線の方程式は，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - t \\ y - t^2 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2ty - t - 2t^3 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

ここで，(3.4) の左辺を $\mathrm{F}(x,\ y,\ t)$ と置けば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(x,\ y,\ t) = 2y - 1 - 6t^2 = 0 \iff t = \pm\sqrt{\frac{2y-1}{6}} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.4), (3.5) より t を消去して，

$$x \pm (2y-1)\sqrt{\frac{2y-1}{6}} \mp 2 \cdot \frac{2y-1}{6}\sqrt{\frac{2y-1}{6}} = 0 \iff x \pm \frac{2}{3\sqrt{6}}(2y-1)^{\frac{3}{2}} = 0$$
$$\iff \frac{27}{2}x^2 = (2y-1)^{\frac{3}{2}} \iff \frac{27}{16}x^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

これは (3.3) と一致する．

[Note] $y = f(x)$ 上の P における法線は，P の曲率中心 Q において縮閉線に接する．
実際，曲率中心の公式 (2.7) より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} &= 1 - f''(t) \times \frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)} - f'(t) \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}\right) \\ &= -(f'(t))^2 - f'(t) \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}\right) = -f'(t)\left(f'(t) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}\right)\right) \\ &= -f'(t) \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(f(t) + \frac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}\right) = -f'(t) \times \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} \quad (\because\ (2.7)) \\ &\iff \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{\mathbf{d}y/\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x/\mathbf{d}t} = -\frac{1}{f'(t)} \iff \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} \times f'(t) = -1 \quad \cdots\cdots(3.7)\end{aligned}$$

(3.7) により，Q における接線の傾きが P における法線の傾きと一致する．
従って，(3.3), (3.6) の両者が一致するのは当然である．即ち，次の定理が成り立つ．

定理: $y = f(x)$ の縮閉線は，$y = f(x)$ の法線の包絡線である

【**Review 17.3.1**】
曲線 $y = f(x)$ 上の点 P$(t,\ f(t))$ における接線の方向角を θ とし，曲率半径を r とすれば，
曲率中心 Q(x, y) は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - r\sin\theta \\ f(t) + r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \left(r = \frac{1}{|\kappa|}\right) \quad \cdots\cdots(3.8)$$

によって与えられることを示せ．

【Review 17.3.2】

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

の縮閉線を求めよ.

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$$

【Review 17.3.3】

Cycloid 曲線

$$x=t-\sin t,\ \ y=1-\cos t \quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

の縮閉線を求めよ.

$$x=t+\sin t,\ y=-1+\cos t$$

【Review 17.3.4】

Asteroid 曲線

$$x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t \quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

の縮閉線を求めよ.

$$x=\cos^3 t+3\sin^2 t\cos t,\ y=\sin^3 t+3\sin t\cos^2 t$$

【Review 17.3.5】

Cardioid 曲線

$$r=1+\cos t \quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

の縮閉線を求めよ.

$$x=\frac{1}{3}(1-\cos t)\cos t+\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}(1-\cos t)\sin t$$

【**Example 17.3.2**】 **– 伸開線 –**

原点を O とし，平面上に 2 点 A(0, 1), B(0, 2) をとる．
OB を直径とする半径 1 の円の $x \geq 0$ の部分に，長さ π の糸が一端を O に固定して巻き付けてある．
ここで，糸の O 以外の端点 P を引き，それが x 軸に達するまで緩むことなく糸を解いていく．
糸と半円の接点を Q とし，$\angle\mathrm{BAQ} = t$ とするとき，P の座標を t を用いて表示せよ．

［註］ 伸開線 (involute)

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は Q における円の接線方向の逆ベクトルであり，その長さは弧 BQ の弧長 t なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = -t \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix} \quad \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t - t\cos t\\ 1+\cos t + t\sin t\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

即ち，

$$\mathrm{P}(\sin t - t\cos t,\ 1+\cos t + t\sin t) \quad (0 \leq t \leq \pi) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

[Note] 媒介変数表示された曲線 (3.11) を円 $x^2+(y-1)^2 = 1\ (x \geq 0)$ の**伸開線**という．
ここで，円の伸開線 (3.11) の縮閉線が原曲線の円である事実を確認しておく．
(3.11) より，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\sin t\\ t\cos t\end{pmatrix} \ \wedge\ \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t + t\cos t\\ \cos t - t\sin t\end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq \pi) \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

このとき，

$$(x')^2 + (y')^2 = t^2 \ \wedge\ x'y'' - x''y' = -t^2 \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

(3.11), (3.12), (3.13) を曲率中心の公式

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} + \frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\begin{pmatrix}-y'\\ x'\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

に代入して，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t - t\cos t\\ 1+\cos t+t\sin t\end{pmatrix} + \frac{t^2}{-t^2}\begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ 1+\cos t\end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq \pi) \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

(3.14) より t を消去して，

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (x \geq 0) \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

上記の事実は一般の曲線で成り立ち，即ち，次の定理が成り立つ．

曲線 C の伸開線の縮閉線は原曲線 C である

【**Review 17.3.6**】

Cycloid 曲線

$$x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

の $\pi \leq t \leq 2\pi$ の部分に貼り付いた糸を点 P : $t = \pi$ から点 Q : $t = 2\pi$ に向けて弛ませずに剥がすとき, 糸の端点 (初期位置 P) の軌跡を求めよ.

$x = t + \sin t,\ y = 3 + \cos t\ \ (\pi \leq t \leq 2\pi)$

【**Review 17.3.7**】

Asteroid 曲線

$$x = \cos^3 t,\ \ y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

の $0 \leq t \leq \pi/4$ の部分に貼り付いた糸を点 P : $t = \pi/4$ から点 Q : $t = 0$ に向けて弛ませずに剥がすとき, 糸の端点 (初期位置 P) の軌跡を求めよ.

$x = -\frac{1}{2}\cos^3 t + \frac{3}{4}\cos t,\ y = -\frac{1}{2}\sin^3 t + \frac{3}{4}\sin t\ \ \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$

【**Review 17.3.8**】

Cardioid 曲線

$$r = 1 + \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

の $0 \leq t \leq \pi$ の部分に貼り付いた糸を点 P : $t = 0$ から点 Q : $t = \pi$ に向けて弛ませずに剥がすとき, 糸の端点 (初期位置 P) の軌跡を求めよ.

$x = 3(1 - \cos t)\cos t + 2,\ y = 3(1 - \cos t)\sin t\ \ (0 \leq t \leq \pi)$