【**Definition**】 **– 既約 Gauss 行列 –**

行列に対する次の操作を**行基本変形**という.

○ i 行目を k 倍する, $(k \neq 0)$

○ i 行目と j 行目を入れ替える, $(i \neq j)$

○ i 行目を k 倍して j 行目に加える. $(k \neq 0, i \neq j)$

この操作により, 以下の性質を満たす行列に帰着したものを**既約 Gauss 行列**という.

- ある行が 0 以外の数を含むとき, 最左列の 0 でない数は 1 である. (これを先頭の 1 と呼ぶ)
- すべての数が 0 である行が存在すれば, それらの行は下方に集められている.
- すべての数は 0 でない 2 つの行に対して, 上の行の先頭の 1 は下の行の先頭の 1 より左側にある.
- 先頭の 1 を含む列の他の数はすべて 0 である.

[註] 「行基本変形」は Gauss の**消去法**ともいう

【**Example 18.1.1**】

次の行列に行基本変形を行い, 既約 Gauss 行列に帰着せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

【解答】

$\mathrm{L}.2-\mathrm{L}.1\times 2,\ \mathrm{L}.3-\mathrm{L}.1\times 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

$\mathrm{L}.3-\mathrm{L}.2\times \dfrac{3}{2},\ \mathrm{L}.3\times(-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

$\mathrm{L}.2+\mathrm{L}.3\times 7,\ \mathrm{L}.2\times \dfrac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

$\mathrm{L}.1-\mathrm{L}.2,\ \mathrm{L}.1-\mathrm{L}.3\times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) が (1.1) の既約 Gauss 行列である.

[Note] i 行目に j 行目の k を加える操作を $\mathrm{L.i}+\mathrm{L.j}\times k$ と表した.

【解説】

行列 (1.1) は，x, y, z の連立方程式

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

の係数を並べた行列であり，既約 Gauss 行列 (1.5) は，

$$\begin{cases} x+0\cdot y+0\cdot z=1 \\ 0\cdot x+y+0\cdot z=2 \\ 0\cdot x+0\cdot y+z=3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

の係数を並べた行列，即ち，(1.6) の解 $(x,\ y,\ z)$ を与える行列である．
即ち，既約 Gauss 行列への行基本変形は，**加減法**による連立方程式の解法のプロセスと同値である．
ここで，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

を連立方程式 (1.6) の**係数行列**，**拡大係数行列**という．

【Review 18.1.1】

既約 Gauss 行列を求めることにより，次の連立方程式の解を求めよ．

$$(1)\ \begin{cases} 3x+2y-3z=1 \\ 2x+z=2 \\ 3x+y-z=1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$$

(1) $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 8,\ 4)$ (2) $(x,\ y,\ z)=()$

【Review 18.1.2】

既約 Gauss 行列を求めることにより，次の連立方程式の解を求めよ．

$$(1)\ \begin{cases} x-y+2z+2w=a \\ 2x-y+4z+2w=b \\ -x+y-z-w=c \\ 2x-y+2z+2w=d \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 2\sin x-\cos y+3\tan z=3 \\ 4\sin x+2\cos y-2\tan z=2 \\ 6\sin x-2\cos y+\tan z=9 \end{cases}$$

(1) $(x,\ y,\ z,\ w)=\left(-a+d,\ 2c+d,\ \dfrac{b-d}{2},\ a+c+\dfrac{-b+d}{2}\right)$ (2) $(\sin x,\ \cos y,\ \tan z)=(1,\ -1,\ 0)$

【Example 18.1.2】

次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_5 = -2 \\ \quad x_3 + 3x_5 = 1 \\ \quad x_4 + 5x_5 = 2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

【解答】

連立方程式 (1.9) の拡大係数行列は，

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

(1.10) は既約 Gauss 行列であり，

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_5 = -2 \\ \quad x_3 + 3x_5 = 1 \\ \quad x_4 + 5x_5 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -6x_2 - 4x_5 - 2 \\ \quad x_3 = -3x_5 + 1 \\ \quad x_4 = -5x_5 + 2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

の成立を意味するので，任意実数 s, t を用いて，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2 - 6s - 4t,\ s,\ 1 - 3t,\ 2 - 5t,\ t) \quad (\forall s, \forall t) \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

なる**不定解** (無限個の解の組) の形で表せる．

[Note]　方程式 (1.9) において，

$$\text{未知数の個数} > \text{(独立した) 方程式の個数} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

であるので，解が不定形で表されるのは当然である．
逆に，ある連立方程式が**一意解**を持つためには，

$$\text{未知数の個数} \leq \text{(独立した) 方程式の個数} \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

が**必要**であり，更に，

$$\text{未知数の個数} = \text{(独立した) 方程式の個数} \ (= n) \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

なる連立方程式の係数行列 (n 次正方行列) の**行列式の値**が 0 でないことが**十分条件**である．
このことは 2 変数の連立方程式を解く際の 2 次行列の議論で経験しているはずである．
「行列式」については，後に詳しく述べる．

【Review 18.1.3】

次の連立方程式の不定解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$

(1) 不能　(2) $(x_1, x_2, \cdots, x_5) = (1, 2s, s, -3t, t)$ $(\forall s, \forall t)$

【Review 18.1.4】

次の連立方程式の不定解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_6) = \left(-2s, -\frac{2}{3}(s+t), -2s, s, t, \frac{1}{3}\right)$ $(\forall s, \forall t)$

【**Example 18.2.1**】 **– 逆行列 –**

次の行列に対して．その左側 3 列を単位行列に変形する行基本変形を施せ．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

【解答】

L.2 − L.1 × 2, L.3 − L.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

L.3 + L.2 × 2, L.3 × (−1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

L.2 + L.3 × 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

L.1 − L.2 × 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -25 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

L.1 − L.3 × 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

ここで，(2.6) の右側 3 列は (2.1) の左側 3 列の**逆行列**である．

実際，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

即ち，一連の行基本変形は，(2.1) 左側 3 列の正方行列の**逆行列を算出する**ものである．

【**Review 18.2.1**】

行基本変形により，次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -9 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

【解説】

一般に，n 次**正方行列**において，行基本変形

$\star$ i 行目を k 倍する　$\star$ i 行目と j 行目を入れ替える　$\star$ i 行目を k 倍して j 行目に加える

などの操作は次のような**行列の積**に対応する．

$\star$ L.3 $\times\, k$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ka_{31}&ka_{32}&ka_{33}\end{pmatrix}\quad(k\neq 0)\qquad\cdots\cdots(2.8)$$

$\star$ L.2 $\rightleftharpoons$ L.3

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(2.9)$$

$\star$ L.3 $+$ L.1 $\times\, k$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+ka_{11}&a_{32}+ka_{12}&a_{33}+ka_{13}\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(2.10)$$

$\star$ L.2 $\rightleftharpoons$ L.4

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(2.11)$$

(2.8), $\cdots$, (2.11) において，

左辺の第 1 行列のような「行基本変形を 1 回だけ施す」行列を**基本行列**といい $\mathbf{E}$ で表す．

また，**単位行列** (主対角成分がすべて 1，他はすべて 0) は基本行列と区別して $\mathbf{I}$ で表す．

このとき，基本行列 $\mathbf{E}$ は常に逆行列 $\mathbf{E}^{-1}$ を持つ．

実際，(2.8), (2.9), (2.10) の基本行列を $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ と表せば，各行基本変形の逆操作を考慮して，

$$\mathbf{E}_1{}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/k\end{pmatrix}\ (k\neq 0),\qquad \mathbf{E}_2{}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\mathbf{E_2},\qquad \mathbf{E}_3{}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-k&0&1\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(2.12)$$

以上の議論を踏まえ，n 次正方行列 $\mathbf{M}$ が逆行列 $\mathbf{M}^{-1}$ を持つとき，

$\mathbf{M}$ を単位行列に変換する基本行列を順に $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\cdots$, $\mathbf{E}_m$ と表せば，

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_m\times\cdots\times\mathbf{E}_1)\mathbf{M}=\mathbf{I}\ &\Longleftrightarrow\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{E}_m\times\cdots\times\mathbf{E}_1)^{-1}=\mathbf{I}\\ &\Longleftrightarrow\ \mathbf{M}^{-1}=\mathbf{I}\times(\mathbf{E}_m\times\cdots\times\mathbf{E}_1)=\mathbf{E}_m\times\cdots\times\mathbf{E}_1\qquad\cdots\cdots(2.13)\end{aligned}$$

従って，上式 (2.13) の結果は，

(2.1) 右側 3 列の単位行列の部分が，行基本変形により，左側 3 列の逆行列に変換されることを意味する．

即ち，行基本変形による逆行列の算出は，逆行列を持つすべての正方行列に一般的に適用できる．

【**Example 18.2.2**】 – 行列式 –

3 次正方行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.14)$$

の行列式は,

$$\det.\mathbf{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \quad \cdots\cdots(2.15)$$

これを**サラス展開**という (速算用の公式).

[註] サラス (sarrus)

【解説】

一般に n 次正方行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.16)$$

に対して, i 行目と j 列目を除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式 Δ_{ij} を考える.

即ち,

$$\Delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ \hline a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \quad \cdots\cdots(2.17)$$

このとき,

$$\tilde{a}_{ij} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \quad \cdots\cdots(2.18)$$

を a_{ij} の**余因子** (cofactor) といい,

$$\det.\mathbf{M} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} \quad (1 \leq \forall i \leq n) \quad \cdots\cdots(2.19)$$

を行列式 det.**M** の第 i 行に関する**余因子展開**という.

同様に, 第 j 列に関する余因子展開も可能である. 即ち,

$$\det.\mathbf{M} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} \quad (1 \leq \forall j \leq n) \quad \cdots\cdots(2.20)$$

具体的に，(2.14) を第 1 行に関して余因子展開してみると，

$$
\begin{aligned}
\det.\mathbf{M} &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\
&= a_{11}(-1)^2\Delta_{11} + a_{12}(-1)^3\Delta_{12} + a_{13}(-1)^4\Delta_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad \cdots\cdots(2.21)
\end{aligned}
$$

となり，サラス展開 (2.15) と一致する．
更に，(2.14) を第 1 列に関して余因子展開すると，

$$
\begin{aligned}
\det.\mathbf{M} &= a_{11}\tilde{a}_{11} - a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \qquad \cdots\cdots(2.22)
\end{aligned}
$$

となり，(2.15) と一致する．

【Review 18.2.2】

次の 3 次行列式の値をサラス展開により求めよ．

$$
(1)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (4)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}
$$

(1) 4　(2) 3　(3) 0　(4) $3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$

【Review 18.2.3】

次の 4 次行列式の値を余因子展開により求めよ．

$$
(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & -9 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & -9 \\ 4 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}
$$

(1) 194　(2) -431　(3) 110

【Review 18.2.4】

次の等式の成立を示せ．

$$
\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2
$$

【**Example 18.2.3**】 **– 逆行列 –**

n 次正方行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.23)$$

の逆行列は,

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{\text{det.}\mathbf{M}}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{i1} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1j} & \cdots & \tilde{a}_{ij} & \cdots & \tilde{a}_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{in} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\text{det.}\mathbf{M}\neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.24)$$

(2.24) 右辺の行列 (行列式の逆数の係数部分を除く) を $\mathbf{M}$ の**余因子行列**といい, $\tilde{\mathbf{M}}$ と表す.

[註] 余因子行列 (adjoint matrix)

【証明】

$n=3$ の証明を理解すれば, 一般の n への拡張は容易である.

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.25)$$

に対して, $\mathbf{M}$ の余因子行列は,

$$\tilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.26)$$

であり, 行列式の余因子展開の性質により,

$$\begin{cases} a_{11}\,\tilde{a}_{11}+a_{12}\,\tilde{a}_{12}+a_{13}\,\tilde{a}_{13}=\text{det.}\mathbf{M} \\ a_{21}\,\tilde{a}_{21}+a_{22}\,\tilde{a}_{22}+a_{23}\,\tilde{a}_{23}=\text{det.}\mathbf{M} \\ a_{31}\,\tilde{a}_{31}+a_{32}\,\tilde{a}_{32}+a_{33}\,\tilde{a}_{33}=\text{det.}\mathbf{M} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.27)$$

ここで, $\mathbf{M}$ の第 1 行を第 2 行に置き換えた行列

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.28)$$

の第 3 行に関する余因子展開を考えれば,

$$\begin{aligned} \text{det.}\mathbf{N} &= a_{31}\,\tilde{a}_{31}+a_{32}\,\tilde{a}_{32}+a_{33}\,\tilde{a}_{33} \\ &= a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{31}\cdot 0 - a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 = 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.29)$$

このとき, $\mathbf{N}$ の第 1 行に関する余因子展開について,

$$a_{21}\,\tilde{a}_{11}+a_{22}\,\tilde{a}_{12}+a_{23}\,\tilde{a}_{13}=\text{det.}\mathbf{N}=0 \qquad \cdots\cdots(2.30)$$

この議論を整理すれば,

$$\begin{cases} a_{11}\,\tilde{a}_{11}+a_{12}\,\tilde{a}_{12}+a_{13}\,\tilde{a}_{13}=\det.\mathbf{M} \\ a_{21}\,\tilde{a}_{11}+a_{22}\,\tilde{a}_{12}+a_{23}\,\tilde{a}_{13}=0 \\ a_{31}\,\tilde{a}_{11}+a_{32}\,\tilde{a}_{12}+a_{33}\,\tilde{a}_{13}=0 \\ a_{11}\,\tilde{a}_{21}+a_{12}\,\tilde{a}_{22}+a_{13}\,\tilde{a}_{23}=0 \\ a_{21}\,\tilde{a}_{21}+a_{22}\,\tilde{a}_{22}+a_{23}\,\tilde{a}_{23}=\det.\mathbf{M} \\ a_{31}\,\tilde{a}_{21}+a_{32}\,\tilde{a}_{22}+a_{33}\,\tilde{a}_{23}=0 \\ a_{11}\,\tilde{a}_{31}+a_{12}\,\tilde{a}_{32}+a_{13}\,\tilde{a}_{33}=0 \\ a_{21}\,\tilde{a}_{31}+a_{22}\,\tilde{a}_{32}+a_{23}\,\tilde{a}_{33}=0 \\ a_{31}\,\tilde{a}_{31}+a_{32}\,\tilde{a}_{32}+a_{33}\,\tilde{a}_{33}=\det.\mathbf{M} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.31)$$

このとき, (2.31) により,

$$\mathbf{M}\times\tilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \det.\mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \det.\mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \det.\mathbf{M} \end{pmatrix}=(\det.\mathbf{M})\,\mathbf{I} \qquad \cdots\cdots(2.32)$$

即ち,

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{\det.\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}=\frac{1}{\det.\mathbf{M}}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.33)$$

【Review 18.2.5】

次の行列の余因子行列を求めて, 逆行列を算出せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -9 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

【Review 18.2.6】

連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.34)$$

の解 x_1, x_2, x_3 は次式 (Cramer の公式) で与えられることを示せ.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \cdots\cdots(2.35)$$

【**Example 18.3.1**】 – 対称行列の対角化 –

次の対称行列の固有値，固有ベクトルを求め，正規直交行列によって対角化せよ．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

[註] ${}^t\mathbf{M}=\mathbf{M}$ を満たす正方行列を**実対称行列** (**実エルミート行列**) という．

【解答】

$\mathbf{M}$ の固有方程式は，

$$\mathrm{det.}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0 \iff \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 6-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\iff (5-\lambda)^2(6-\lambda)+2+1-4(6-\lambda)-2(5-\lambda)=0$$

$$\iff (\lambda-8)(\lambda-5)(\lambda-3)=0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

即ち，固有値は 8, 5, 3 である．

- $\lambda_1=8$ に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_1}$ を求める．

$$\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) を既約 Gauss 行列に行基本変形する．

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.1}\leftrightharpoons\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.2}+\text{L.1}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.3}+\text{L.1}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.3}-\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.2}\times(-1/5)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.1}+\text{L.2}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) により，$\overrightarrow{v_1}=(x,\ y,\ z)$ に対して，

$$x+z=0 \ \wedge\ y+z=0 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が成り立つので，(3.4) を満たす単位ベクトルとして，

$$\overrightarrow{v_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ -1,\ 1) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

- $\lambda_2 = 5$ に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$ を求める．

$$\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) を既約 Gauss 行列に行基本変形する．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.1}\leftrightharpoons\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.3}+\text{L.1}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.3}-\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.1}-\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) により，$\overrightarrow{v_2} = (x,\ y,\ z)$ に対して，

$$x + z = 0 \ \land \ y - 2z = 0 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

が成り立つので，(3.8) を満たす単位ベクトルで，$\overrightarrow{v_1}$ と直交するものとして，

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 2,\ 1) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

- $\lambda_3 = 3$ に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_3}$ を求める．

$$\mathbf{M} - \lambda_3 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) を既約 Gauss 行列に行基本変形する．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.1}\leftrightharpoons\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.3}+\text{L.1}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.2}-\text{L.1}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.3}+\text{L.2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.2}\times(-1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.1}-\text{L.2}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.11) により，$\overrightarrow{v_3} = (x,\ y,\ z)$ に対して，

$$x - z = 0 \ \land \ y = 0 \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

が成り立つので，(3.12) を満たす単位ベクトルで，$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ と直交するものとして，

$$\overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1) \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

(3.5), (3.9), (3.13) により,

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & 2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

このとき,

$$^t\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -1 & 2 & 1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

が成り立ち, (3.14), (3.15) により,

$$^t\mathbf{PMP}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

【解説】

一般に, n 次対称行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad \left(a_{ij}=a_{ji}\ (1\leq i<j\leq n)\right) \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

は (重複を含めて) n 個の**実固有値**を持つ.

$n\geq 3$ における証明は割愛するが, 入試でも役立つ $n=2$ の場合の証明を与える.

$$\det.(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0 \iff \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0 \iff \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

(3.8) の判別式 D に対して,

$$\mathrm{D}=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc=(a-d)^2+4b^2\geq 0 \quad \left(\because\ b=c\right) \qquad \cdots\cdots(3.19)$$

ここで, 等号成立条件は,

$$a=d\ \wedge\ b=c=0 \qquad \cdots\cdots(3.20)$$

即ち, $\mathbf{M}$ が**スカラー行列**のときである.

従って, 2 次対称行列は, スカラー行列の場合を除き, 2 個の異なる実固有値を持つ.

(2 次対称行列は, 2 次曲線の標準化の議論でも扱った!)

【Review 18.3.1】

次の対称行列の固有値, 固有ベクトルを求め, 正規直交行列によって対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}6 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

固有値 : $\{1,\ 7,\ -2\}$, $\{1,\ 2,\ 5\}$ 　正規直交列 : $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 4 & -\sqrt{2}\\ -3 & 1 & 2\sqrt{2}\\ 3 & 1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

【**Example 18.3.2**】 **– 対称行列の対角化 –**

次の対称行列の固有値，固有ベクトルを求め，正規直交行列によって対角化せよ．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.21)$$

【解答】

$\mathbf{M}$ の固有方程式は，

$$\text{det.}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0 \iff \begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&-1\\1&-1&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\iff -\lambda^3-2+3\lambda=0 \iff (\lambda-1)^2(\lambda+2)=0 \qquad \cdots\cdots(3.22)$$

即ち，固有値は $-2,\ 1$(**重根**) である．

- $\lambda_1=-2$ に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_1}$ を求める．

$$\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.23)$$

(3.23) を既約 Gauss 行列に行基本変形する．

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{L.1}\leftrightharpoons\text{L.2}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{L.3}-\text{L.1}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.2}-\text{L.1}\times 2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{L.3}-\text{L.2}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{L.2}\times(-1/3)}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.1}-\text{L.2}\times 2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.24)$$

(3.24) により，$\overrightarrow{v_1}=(x,\ y,\ z)$ に対して，

$$x+z=0 \ \wedge\ y-z=0 \qquad \cdots\cdots(3.25)$$

が成り立つので，(3.25) を満たす単位ベクトルとして，

$$\overrightarrow{v_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1) \qquad \cdots\cdots(3.26)$$

- $\lambda_0 = 1$ (重根) に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ を求める．

$$\mathbf{M} - \lambda_0 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.27)$$

(3.27) を既約 Gauss 行列に行基本変形する．

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.3}-\text{L.2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L.2}+\text{L.1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L.1}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.28)$$

(3.28) により，$\overrightarrow{v_k} = (x,\ y,\ z)\ (k = 2, 3)$ に対して，

$$x - y - z = 0 \qquad \cdots\cdots(3.29)$$

が成り立つので，(3.29) を満たす互いに直交する単位ベクトルとして，

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1), \quad \overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ 1) \qquad \cdots\cdots(3.30)$$

ここで，$\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ は $\overrightarrow{v_1}$ に直交するものを選んだ．
(3.26), (3.30) により，

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.31)$$

このとき，

$${}^t\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.32)$$

が成り立ち，(3.31), (3.32) により，

$${}^t\mathbf{PMP} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.33)$$

[Note]　本問は 3 個の固有値の内の 2 個が重複する場合であり，
重複固有値 $\lambda_0 = 1$ に対応する固有ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ は，

$$\overrightarrow{v_k} = \begin{pmatrix} s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\forall s,\ \forall t) \quad \big(\because\ (3.29)\big) \qquad \cdots\cdots(3.34)$$

から 2 個の正規直交ベクトル $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ を生成している点が，3 個の異なる固有値の前問と異なる．

【解説】

対角化の計算過程を整理しておく.

固有値, 固有ベクトルの定義により, $\mathbf{M}$ を 3 次実対称行列として,

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (k = 1, 2, 3) \qquad \cdots\cdots(3.35)$$

ここで, $\mathbf{v}_k = {}^t(x_k \ \ y_k \ \ z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ であり,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 \ \ (i = j) \\ 0 \ \ (i \neq j) \end{cases} \quad (1 \leq i, \ j \leq 3) \qquad \cdots\cdots(3.36)$$

を満たすように選ぶ. 即ち, $(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)$ を正規直交行列とする.

このとき, (3.35) により,

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ \lambda_3\mathbf{v}_3) \iff \mathbf{M}(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.37)$$

ここで, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は互いに直交しており, 1 次独立なので, $\det.(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3) \neq 0$.

従って, $(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)^{-1}$ を (3.37) に左側から掛けて,

$$(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.38)$$

以上が対角化の全過程であるが, (3.37) より直ちに $\mathbf{M}$ の**直和分解**が得られる. 即ち,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ \lambda_3\mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)^{-1} \\
&= (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ \lambda_3\mathbf{v}_3)\left({}^t({}^t\mathbf{v}_1 \ \ {}^t\mathbf{v}_2 \ \ {}^t\mathbf{v}_3)\right) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ \lambda_3\mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{v}_1 \\ {}^t\mathbf{v}_2 \\ {}^t\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_3 \qquad \cdots\cdots(3.39)
\end{aligned}$$

(3.39) 右辺が $\mathbf{M}$ の直和分解になっている.

ここで, 正規直交行列 $(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)$ に対しては,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\because \ (3.36)) \qquad \cdots\cdots(3.40)$$

により, $(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)^{-1} = {}^t(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)$ が成り立つので,

(3.39) の計算過程において,

$$(\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{v}_1 \\ {}^t\mathbf{v}_2 \\ {}^t\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = {}^t({}^t\mathbf{v}_1 \ \ {}^t\mathbf{v}_2 \ \ {}^t\mathbf{v}_3) \qquad \cdots\cdots(3.41)$$

が成り立っている.

[Note] $\mathbf{P}^{-1} = {}^t\mathbf{P}$ を満たす行列を**ユニタリー行列** (unitary matrix) という.

【**Review 18.3.2**】

次の対称行列の固有値，固有ベクトルを求め，正規直交行列によって対角化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値 : $\{0,\ 4,\ 6\}$, $\{3,\ 0\ (\text{重根})\}$　　正規直交行列 : $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

【**Example 18.3.3**】 **– 二次曲線の標準化 –**

2 次曲線

$$ax^2+2bxy+cy^2+2px+2qy+r=0 \qquad \cdots\cdots(3.35)$$

は 3 次対称行列を用いて.

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \qquad \cdots\cdots(3.36)$$

と表現され，この 3 次対称行列の正規直交行列による対角化によって，(3.35) は標準化される.

【解説】

(3.35) の 2 次の項

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.37)$$

における 2 次対称行列を対角化する 2 次正規直交行列は**回転行列**であり，
その回転角を θ とすれば,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.38)$$

ここで，λ_1, λ_2 は (3.37) の 2 次対称行列の**固有値**であり，
(3.38) 左辺の第 1 行列は第 3 行列の**転置行列** (逆行列) である.
このとき，3 次正規直交行列 $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.39)$$

ととれば,

$${}^t\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.40)$$

このとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.41)$$

なる変換を (3.36) に施せば,

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=0 \qquad \cdots\cdots(3.42)$$

(3.42) 左辺の 3 次行列の積の部分は,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & p\cos\theta+q\sin\theta \\ 0 & \lambda_2 & -p\sin\theta+q\cos\theta \\ p\cos\theta+q\sin\theta & -p\sin\theta+q\cos\theta & r \end{pmatrix} \quad (\because\ (3.38)) \qquad \cdots\cdots(3.43)\end{aligned}$$

(3.43) を (3.42) に代入して，

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & p\cos\theta+q\sin\theta \\ 0 & \lambda_2 & -p\sin\theta+q\cos\theta \\ p\cos\theta+q\sin\theta & -p\sin\theta+q\cos\theta & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\iff \lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2(p\cos\theta+q\sin\theta)x'+2(-p\sin\theta+q\cos\theta)y'+r=0 \quad \cdots\cdots(3.44)$$

従って，(3.35) が標準化された．

【Review 18.3.3】

3 次対称行列とそれを対角化する 3 次正規直交行列により，次の 2 次曲線を標準化せよ．

(1) $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$ (2) $11x^2+4xy+14y^2-4x-28y-16=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2-6x-8y+5=0$ (4) $x^2-8xy+y^2+2x-8y-14=0$

【**Example 18.4.1**】 **– 対称行列の直和分解 –**

次の対称行列を直和分解を用いて冪乗を計算せよ.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

[註] 直和分解 (スペクトル分解)

【解答】

[Example 18.3.1] により, $\mathbf{M}$ の固有値, 固有ベクトルは,

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = (8,\ 5,\ 3), \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

ここで, 3 次行列 $\left(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right)$ が正規直交列となる $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ を選ぶ.
このとき,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1\ -1\ 1) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1\ 2\ 1) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

と表せば,

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{I} \quad \left(\mathbf{I} : \text{単位行列}\right) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

一方, (3.39) により,

$$\mathbf{M} = \lambda_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3{}^t\mathbf{v}_3 = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

実際, (4.5) を成分計算してみると,

$$\frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\mathbf{P}_1{}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \quad \left(\text{冪等性}\right) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

同様に,

$$\mathbf{P}_2{}^2 = \mathbf{P}_2 \ \wedge\ \mathbf{P}_3{}^2 = \mathbf{P}_3 \quad \left(\text{冪等性}\right) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

更に,

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \end{cases} \quad \text{(零因子)} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

同様に,

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 = \mathbf{O} \ \wedge \ \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

従って, (4.4), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) により,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^n &= \lambda_1{}^n\mathbf{P}_1 + \lambda_2{}^n\mathbf{P}_2 + \lambda_3{}^n\mathbf{P}_3 \\ &= 8^n \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5^n \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3^n \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 8^n + 5^n + 3\cdot 3^n & 2\cdot 8^n - 2\cdot 5^n & -2\cdot 8^n - 5^n + 3\cdot 3^n \\ 2\cdot 8^n - 2\cdot 5^n & 2\cdot 8^n + 4\cdot 5^n & -2\cdot 8^n + 2\cdot 5^n \\ -2\cdot 8^n - 5^n + 3\cdot 3^n & -2\cdot 8^n + 2\cdot 5^n & 2\cdot 8^n + 5^n + 3\cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

[Note]　$\mathbf{P}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ の冪等性;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k{}^2 &= (\mathbf{v}_k{}^t\mathbf{v}_k)^2 = (\mathbf{v}_k{}^t\mathbf{v}_k)(\mathbf{v}_k{}^t\mathbf{v}_k) \\ &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}(x_k \ \ y_k \ \ z_k) \times \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}(x_k \ \ y_k \ \ z_k) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \times (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) \times (x_k \ \ y_k \ \ z_k) \\ &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}(x_k \ \ y_k \ \ z_k) = \mathbf{v}_k{}^t\mathbf{v}_k = \mathbf{P}_k \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

ここで, $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = 1$ $(i = j)$ を用いた.

[Note]　$\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_j (i \neq j)$ の零因子性;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i\mathbf{P}_j &= (\mathbf{v}_i{}^t\mathbf{v}_i)(\mathbf{v}_j{}^t\mathbf{v}_j) \\ &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}(x_i \ \ y_i \ \ z_i) \times \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}(x_j \ \ y_j \ \ z_j) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \times (x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j) \times (x_j \ \ y_j \ \ z_j) \\ &= 0 \times \begin{pmatrix} x_ix_j & x_iy_j & x_iz_j \\ y_ix_j & y_iy_j & y_iz_j \\ z_ix_j & z_iy_j & z_iz_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

ここで, $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = 0$ $(i \neq j)$ を用いた.

[Note]

射影行列 (冪等性を有する行列) $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ を固有ベクトル $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ から生成するこの方法は, $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$ が正規直交行列となる対称行列 $\mathbf{M}$ に限られる. 次の例題で一般的な射影行列の生成法を扱う.

【**Review 18.4.1**】

次の対称行列を直和分解を用いて冪乗を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 16\cdot 7^n+2(-2)^n & 4\cdot 7^n-4(-2)^n & 4\cdot 7^n-4(-2)^n \\ 4\cdot 7^n+8(-2)^n & 9+7^n+8(-2)^n & -9+7^n+8(-2)^n \\ 4\cdot 7^n-4(-2)^n & -9+7^n+8(-2)^n & 9+7^n+8(-2)^n \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+2\cdot 2^n+5^n & -3+2\cdot 2^n+5^n & -2\cdot 2^n+2\cdot 5^n \\ -3+2\cdot 2^n+5^n & 3+2\cdot 2^n+5^n & -2\cdot 2^n+2\cdot 5^n \\ -2\cdot 2^n+2\cdot 5^n & -2\cdot 2^n+2\cdot 5^n & 2\cdot 2^n+4\cdot 5^n \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4\cdot 6^n & 2\cdot 6^n & 2\cdot 6^n \\ 2\cdot 6^n & 3\cdot 4^n+6^n & -3\cdot 4^n+6^n \\ 2\cdot 6^n & -3\cdot 4^n+6^n & 3\cdot 4^n+6^n \end{pmatrix}$

(4) $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

【**Example 18.4.2**】

次の行列を直和分解する射影行列を求めよ．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 6 & -1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(4.13)$$

【解答】

[Example 18.4.1] により，$\mathbf{M}$ の固有値は，

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)=(8,\ 5,\ 3) \quad \cdots\cdots(4.14)$$

- $\lambda_1=8$ の場合;

$$\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{Q}_1 \quad \cdots\cdots(4.15)$$

- $\lambda_2=5$ の場合;

$$\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{Q}_2 \quad \cdots\cdots(4.16)$$

- $\lambda_3=3$ の場合;

$$\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{Q}_3 \quad \cdots\cdots(4.17)$$

このとき，可換非正則行列 $\mathbf{Q}_1,\ \mathbf{Q}_2,\ \mathbf{Q}_3$ に対して，
射影行列 $\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2,\ \mathbf{P}_3$ を次の要領で構成する．

$$\mathbf{P}_1=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_1=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(4.18)$$

(4.18) の $\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2,\ \mathbf{P}_3$ は，(4.3) で求めたものに一致するので，

$$\begin{cases}\mathbf{M}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\lambda_3\mathbf{P}_3\\ \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3=\mathbf{I}\ \left(\mathbf{I}:\text{単位行列}\right)\\ {\mathbf{P}_k}^2=\mathbf{P}_k\ \ (k=1,2,3)\\ \mathbf{P}_i\mathbf{P}_j=\mathbf{O}\ \ (i\neq j)\end{cases} \quad \cdots\cdots(4.19)$$

を満たす．
即ち，求める射影行列は (4.18) である．

【解説】

3 次行列 $\mathbf{M}$ に対する Hamilton-Cayley の定理を考える.
$\mathbf{M}$ の固有方程式 (特性方程式) $\det.(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0$ の解を $\lambda_k\ (k=1,2,3)$ と表す.
このとき, サラス展開により固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\iff \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}+\tilde{a}_{33})\lambda-(\det.\mathbf{M})=0 \quad \cdots\cdots(4.20)$$

一方, (4.20) 左辺を $\phi(\lambda)$ と表せば, 固有値 $\lambda_k\ (k=1,2,3)$ の定義により,

$$\phi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda3+\lambda_3\lambda_1)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad \cdots\cdots(4.21)$$

このとき, $\mathbf{M}$ に対して恒等的に

$$\phi(\mathbf{M})=\mathbf{O} \iff (\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I})=\mathbf{O}$$
$$\iff \mathbf{M}^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{M}^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda3+\lambda_3\lambda_1)\mathbf{M}-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,\mathbf{I}=\mathbf{O} \quad \cdots\cdots(4.22)$$

が成り立つ. (Hamilton-Cayley の定理)
このとき, $\{i,\ j,\ k\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ に対して,

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j=\frac{\mathbf{Q}_j\mathbf{Q}_k}{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_i-\lambda_j)}\times\frac{\mathbf{Q}_k\mathbf{Q}_i}{(\lambda_j-\lambda_k)(\lambda_j-\lambda_i)}=\frac{\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j\mathbf{Q}_k\cdot\mathbf{Q}_k}{(\lambda_i-\lambda_j)^2(\lambda_j-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_i)} \quad \cdots\cdots(4.23)$$

ここで, (4.23) 右辺分子において,

$$\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j\mathbf{Q}_k=(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I})=\mathbf{O} \quad \bigl(\because\ (4.22)\bigr) \quad \cdots\cdots(4.24)$$

(4.23), (4.24) により,

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j=\mathbf{O} \quad (i\neq j) \quad \cdots\cdots(4.25)$$

また, $\{i,\ j,\ k\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ に対して,

$$\mathbf{P}_k{}^2=\frac{(\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j)^2}{(\lambda_k-\lambda_i)^2(\lambda_k-\lambda_j)^2}=\frac{(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})^2(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})^2}{(\lambda_k-\lambda_i)^2(\lambda_k-\lambda_j)^2} \quad \cdots\cdots(4.26)$$

ここで, (4.26) 右辺分子において,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})^2(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})^2\\ &=(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})\times(\mathbf{M}-\lambda_k\mathbf{I}+\lambda_k\mathbf{I}-\lambda_i\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_k\mathbf{I}+\lambda_k\mathbf{I}-\lambda_j\mathbf{I})\\ &=(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})\times(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)\mathbf{I} \quad \bigl(\because\ (4.22)\bigr)\\ &=(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)\times\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j \quad \cdots\cdots(4.27)\end{aligned}$$

(4.26), (4.27) により,

$$\mathbf{P}_k{}^2=\mathbf{P}_k \quad (k=1,2,3) \quad \cdots\cdots(4.28)$$

更に, $\{i,\ j,\ k\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ に対して,

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3)=\mathbf{P}_k{}^2=\mathbf{P}_k \iff \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3=\mathbf{I} \quad \cdots\cdots(4.29)$$

従って, 一般の $\mathbf{M}$ に対して, 射影行列 $\mathbf{P}_k\ (k=1,2,3)$ の性質 ((4.19) の下 3 式) が確認できた.
上記の計算で核となる Hamilton-Cayley の定理の証明を次頁に与える.

【定理の証明】 **– Hamilton-Cayley –**

$\mathbf{M}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{M}}$ を adj.$\mathbf{M}$ で表すとき，

$$\mathrm{adj}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=\begin{pmatrix}\Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31}\\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32}\\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.30)$$

ただし，

$$\begin{cases}\Delta_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{22}+a_{33})\lambda+\tilde{a}_{11}\\ \Delta_{22}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{33})\lambda+\tilde{a}_{22}\\ \Delta_{33}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\tilde{a}_{33}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.31)$$

更に，

$$\begin{cases}\Delta_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=-a_{21}\lambda-\tilde{a}_{12}, & \Delta_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}-\lambda\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{31}\lambda+\tilde{a}_{13}\\ \Delta_{21}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=-a_{12}\lambda-\tilde{a}_{21}, & \Delta_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-a_{32}\lambda-\tilde{a}_{23}\\ \Delta_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22}-\lambda & a_{23}\end{vmatrix}=a_{13}\lambda+\tilde{a}_{31}, & \Delta_{32}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}=-a_{23}\lambda-\tilde{a}_{32}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.32)$$

(4.31), (4.32) により，(4.30) 右辺を λ の 2 次式として整理すれば，

$$\begin{aligned}&\mathrm{adj}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\\ &=\lambda^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}a_{22}+a_{33} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & a_{11}+a_{33} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & a_{11}+a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{31}\\ \tilde{a}_{12}&\tilde{a}_{22}&\tilde{a}_{32}\\ \tilde{a}_{13}&\tilde{a}_{23}&\tilde{a}_{33}\end{pmatrix}\\ &=\lambda^2\mathbf{I}-\lambda\mathbf{N}+\tilde{\mathbf{M}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.33)$$

このとき，

$$\begin{aligned}&(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\times\mathrm{adj}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{I}\\ &\iff (\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})(\lambda^2\mathbf{I}-\lambda\mathbf{N}+\tilde{\mathbf{M}})=\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{I} \quad (\because\ (4.33))\\ &\iff (\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})(\lambda^2\mathbf{I}-\lambda\mathbf{N}+\tilde{\mathbf{M}})=-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\,\mathbf{I}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.34)$$

(4.34) を λ の 3 次式として整理して，

$$\begin{aligned}&-\lambda^3\mathbf{I}+\lambda^2(\mathbf{M}+\mathbf{N})-\lambda(\tilde{\mathbf{M}}+\mathbf{MN})+\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}\\ &=-\lambda^3\mathbf{I}+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2\mathbf{I}-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda\,\mathbf{I}+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathbf{I}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.35)$$

(4.35) 両辺の係数行列を比較して，

$$\begin{cases}\mathbf{M}+\mathbf{N}=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{I} & \cdots\cdots(4.36)\\ \tilde{\mathbf{M}}+\mathbf{MN}=(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\,\mathbf{I} & \cdots\cdots(4.37)\\ \mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathbf{I} & \cdots\cdots(4.38)\end{cases}$$

ここで，(4.36) $\times\mathbf{M}^2-$ (4.37) $\times\mathbf{M}+$ (4.38) とすると，

$$\mathbf{M}^3=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{M}^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\mathbf{M}+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathbf{I}$$
$$\iff \mathbf{M}^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{M}^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\mathbf{M}-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathbf{I}=\mathbf{O} \quad \cdots\cdots(4.39)$$

即ち，$\phi(\mathbf{M})=\mathbf{O}$ が導かれ，定理が示された．

最後に，(4.19) の第 1 式

$$\mathbf{M}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\lambda_3\mathbf{P}_3 \quad \cdots\cdots(4.40)$$

の成立を確認すれば，例題の [解説] は終了する．
Hamilton-Cayley の定理より，

$$(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I})=\mathbf{O}$$
$$\iff \mathbf{M}(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I})=\lambda_1(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_3\mathbf{I})$$
$$\iff \mathbf{M}\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3=\lambda_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3 \quad \left(\because\ \mathbf{Q}_k\ (k=1,2,3)\ \text{の定義}\right)$$
$$\iff \mathbf{M}\frac{\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\lambda_1\frac{\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$
$$\iff \mathbf{M}\mathbf{P}_1=\lambda_1\mathbf{P}_1 \quad \left(\because\ \mathbf{P}_k\ (k=1,2,3)\ \text{の定義}\right) \quad \cdots\cdots(4.41)$$

同様の計算を繰り返して，

$$\mathbf{M}\mathbf{P}_1=\lambda_1\mathbf{P}_1\ \wedge\ \mathbf{M}\mathbf{P}_2=\lambda_2\mathbf{P}_2\ \wedge\ \mathbf{M}\mathbf{P}_3=\lambda_3\mathbf{P}_3 \quad \cdots\cdots(4.42)$$

(4.42) の辺々を加えて，

$$\mathbf{M}(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3)=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\lambda_3\mathbf{P}_3$$
$$\iff \mathbf{M}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\lambda_3\mathbf{P}_3 \quad \left(\because\ \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3=\mathbf{I}\ (4.29)\right) \quad \cdots\cdots(4.43)$$

従って，(4.40) の成立が確認できた．

以上の説明を通じて得られた幾つかの [定理] をまとめておく．

$$\begin{cases} \bullet\ \mathrm{det}.\mathbf{M}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 & \left(\because\ (4.20),\ (4.21)\right) \\ \bullet\ \mathrm{trace}.\mathbf{M}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \left(\because\ (4.20),\ (4.21)\right) \\ \bullet\ \mathrm{trace}.\tilde{\mathbf{M}}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 & \left(\because\ (4.20),\ (4.21)\right) \\ \bullet\ \mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}=(\mathrm{det}.\mathbf{M})\,\mathbf{I} & \left(\because\ (4.38)\right) \\ \star\ \mathbf{M}^{-1}=\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\left\{\mathbf{M}^2-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{M}+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\,\mathbf{I}\right) & \left(\mathrm{det}.\mathbf{M}\neq 0\right\} \end{cases}$$

[Note] この例題の方法による直和分解は，対称行列に限定されない．
重複しない 3 個の実固有値を持つすべての行列に対して適用できるので，
ベクトル $\mathbf{v}_k$ $(k=1,2,3)$ から射影行列 $\mathbf{P}_k = \mathbf{v}_k{}^t\mathbf{v}_k$ を構成する前例題の方法より汎用性がある．
次の (非対称行列の) 問題で確認してほしい．

【**Review 18.4.2**】
次の非対称行列の射影行列を求め，直和分解せよ．

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 20 & 6 & -4 \\ 4 & 18 & 4 \\ -6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

【**Example 18.4.3**】

次の行列の冪乗を Hamilton-Cayley の定理を利用して求めよ.

$$(1)\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\qquad(2)\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\qquad(3)\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

【解答】

(1) まず, $\mathbf{M}$ の固有方程式 (特性方程式) を考える.

$$\det.(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0$$

$$\iff\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\-1&3-\lambda&0\\-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\iff(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+(2-\lambda)=0$$

$$\iff(\lambda-2)^3=0\quad\cdots\cdots(4.44)$$

固有値は $\lambda_0=2$ (三重根) であり,

$$(\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{I})^3=\mathbf{O}\ \ (\lambda_0=2)\quad\bigl(\text{Hamilton-Cayley}\bigr)\quad\cdots\cdots(4.45)$$

ここで,

$$\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{I}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{N}\quad\cdots\cdots(4.46)$$

とすると,

$$\mathbf{N}^2=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{O}\quad\cdots\cdots(4.47)$$

即ち, $\mathbf{N}$ は冪零行列であり,

$$\mathbf{N}^m=\mathbf{O}\quad(m=2,3,4,\cdots)\quad\cdots\cdots(4.48)$$

従って, 二項定理により,

$$\mathbf{M}^n=(\mathbf{N}+\lambda_0\mathbf{I})^n=n\mathbf{N}(\lambda_0\mathbf{I})^{n-1}+(\lambda_0\mathbf{I})^n$$

$$=n(\lambda_0)^{n-1}\mathbf{N}+(\lambda_0)^n\mathbf{I}=n\cdot2^{n-1}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-n\cdot2^{n-1}+2^n&n\cdot2^{n-1}&0\\-n\cdot2^{n-1}&n\cdot2^{n-1}+2^n&0\\-n\cdot2^{n-1}&n\cdot2^{n-1}&2^n\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(4.49)$$

[Note] $\varphi(\mathbf{M})=\mathbf{O}$ を満たす最低次数の多項式 $\varphi(\lambda)$ を $\mathbf{M}$ の最小多項式という.
本問の場合, $\mathbf{M}$ の最小多項式は,

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2\quad\bigl(\because\ \mathbf{N}^2=\mathbf{O}\bigr)\quad\cdots\cdots(4.50)$$

(2) [Example 18.3.2] により，$\mathbf{M}$ の個有値は，

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1\ (\text{重複固有値}) \qquad \cdots\cdots(4.51)$$

このとき，Hamilton-Cayley の定理により，

$$(\mathbf{M}+2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\mathbf{I})^2 = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(4.52)$$

- $\lambda_1 = -2$ に対して，

$$\mathbf{M} - (-2)\,\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_1 \ \wedge\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{Q}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}_2 \qquad \cdots\cdots(4.53)$$

- $\lambda_2 = 1$ に対して，

$$\mathbf{M} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_2 \ \wedge\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathbf{Q}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{Q}_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}_1 \qquad \cdots\cdots(4.54)$$

(4.53), (4.54) により，

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{M}+2\mathbf{I})(\mathbf{M}-\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(4.55)$$

即ち，$\mathbf{M}$ の最小多項式は，$\varphi(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)$ であり，

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O} \quad \bigl(\because\ (4.53),\ (4.54),\ (4.55)\bigr) \qquad \cdots\cdots(4.56)$$

更に，

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) = \frac{1}{3}\bigl((\mathbf{M}+2\mathbf{I}) - (\mathbf{M}-\mathbf{I})\bigr) = \mathbf{I} \iff \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I} \qquad \cdots\cdots(4.57)$$

このとき，(4.56), (4.57) により，

$$\mathbf{P}_i{}^2 = \mathbf{P}_i(\mathbf{I} - \mathbf{P}_j) = \mathbf{P}_i \quad \bigl(\{i,\ j\} = \{1,\ 2\}\bigr) \iff \mathbf{P}_k{}^2 = \mathbf{P}_k \quad (k = 1,\ 2) \qquad \cdots\cdots(4.58)$$

一方，

$$\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{Q}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_1 = \frac{2}{3}(\mathbf{M}-\mathbf{I}) + \frac{1}{3}(\mathbf{M}+2\mathbf{I}) = \mathbf{M} \iff \mathbf{M} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 \qquad \cdots\cdots(4.59)$$

が成り立つので，二項定理により，

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^n &= (\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2)^n = (\lambda_1)^n\mathbf{P}_1 + (\lambda_2)^n\mathbf{P}_2 \\ &= (-2)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-2)^n+2 & -(-2)^n+1 & -(-2)^n+1 \\ -(-2)^n+1 & (-2)^n+2 & (-2)^n-1 \\ -(-2)^n+1 & (-2)^n-1 & (-2)^n+2 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.60)$$

(3) [Review 18.3.2] により，$\mathbf{M}$ の個有値は，

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0\ (\text{重複固有値}) \qquad \cdots\cdots(4.61)$$

このとき，Hamilton-Cayley の定理により，

$$\mathbf{M}^2(\mathbf{M}-3\mathbf{I}) = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(4.62)$$

ここで，

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}-3\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \qquad \cdots\cdots(4.63)$$

即ち，$\mathbf{M}$ の最小多項式は，$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-3)$ である．
このとき，(4.63) により，

$$\mathbf{M}^n = 3^{n-1}\mathbf{M} = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.64)$$

【解説】

例題の目的は，**重複固有値**を持つ場合の固有値分解による冪乗計算の手法を整理することである．
そこで，3 次行列 $\mathbf{M}$ の固有多項式を $\phi(\lambda)$，最小多項式を $\varphi(\lambda)$ と表す．

- $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^3$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^3$ の場合;

$$\mathbf{M}^n = \frac{n(n-1)}{2}(\lambda_0)^{n-2}\mathbf{N}^2 + n(\lambda_0)^{n-1}\mathbf{N} + (\lambda_0)^n\mathbf{I} \quad \big(\mathbf{N} = \mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{I}\big) \qquad \cdots\cdots(4.65)$$

- $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^3$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^2$ の場合;

$$\mathbf{M}^n = n(\lambda_0)^{n-1}\mathbf{N} + (\lambda_0)^n\mathbf{I} \quad \big(\mathbf{N} = \mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{I}\big) \qquad \cdots\cdots(4.66)$$

- $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ の場合;

$$\mathbf{M}^n = (\lambda_1)^n\mathbf{P}_1 + (\lambda_2)^n\mathbf{P}_2 \quad \left(\mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I}}{\lambda_i-\lambda_j} \ \ \big(\{i,\ j\} = \{1,\ 2\}\big)\right) \qquad \cdots\cdots(4.67)$$

- $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)^2$ の場合;

$$\mathbf{M}^n = n(\lambda_2)^{n-1}\mathbf{N} + (\lambda_2)^n\mathbf{I} \quad \big(\mathbf{N} = \mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I}\big) \qquad \cdots\cdots(4.68)$$