【Example 1.1】

(1) 3 次関数 $\mathfrak{C} : y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ のグラフは点対称であることを示せ.

(2) $\mathfrak{C}$ 上の点 $x = \alpha$ で引いた接線が, 再び $\mathfrak{C}$ と点 $x = \beta$ で交わるとする.

このとき, 対称中心の点を $x = \gamma$ として, $\beta - \gamma : \gamma - \alpha = 2 : 1$ が成り立つことを示せ.

[Note] いずれも重要な事実である. 証明方法も含めて記憶しておくべきである.

【解説】

(1) 奇関数が原点対称であることは既知とする.

そこで, 一般の 3 次関数を適当な平行移動により奇関数に移すことができれば証明は終わる.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + f\left(-\frac{b}{3a}\right) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

より, 曲線 $y = f(x)$ は,

$$y = g(x) = ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x \quad (\textbf{奇関数}) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

を $(-b/3a,\ f(-b/3a))$ だけ平行移動したものである.

$y = g(x)$ は原点対称であるから, $y = f(x)$ は

$$\left(-\frac{b}{3a},\ f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

に関して点対称である.

Comment

$x = -b/3a$ は $f''(x) = 0$ の解 (**変曲点**) であり, この事実は対称中心を直ちに見つけるのに便利である.
(1.1) の変形は $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いて, 2 次の項までのつじつま合わせをしている.
言わば立方完成とでも呼ぶべき計算手法である.

(2) $x = \alpha$ における接線を $y = h(x)$ とすると,

$$f(x) - h(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

と因数分解できる.

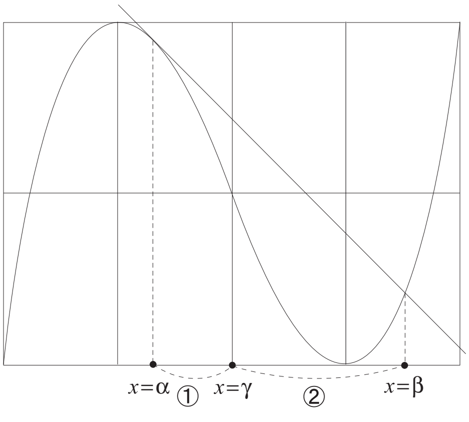
ここで, 2 次の項の係数を比較して,

$$b = -a(2\alpha + \beta) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

そこで, $\gamma = -\dfrac{b}{3a}$ とすれば,

$$\gamma = \frac{2\alpha + \beta}{3} \iff \beta - \gamma = 2(\gamma - \alpha) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

が成り立つ.



Comment

(1.5) の導出は頻繁に行われるので必ず記憶しておくべきである.
接線の方程式 $y = h(x)$ を具体的に求めずに, α, β の関係を求められることに注意せよ.

Point

3 次関数のグラフは変曲点対称 $\Longrightarrow$ 証明は立方完成

接点，交点の x 座標 α, β は 2 次の係数と結びつく

【Review 1.1.1】 91 東大

関数 $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ の $-\dfrac{7}{4}\leq x\leq 3$ における最大値と最小値を求めよ．

[答] 最大値 : $\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}$，最小値 : $-\dfrac{143}{64}$

【Review 1.1.2】 90 東大

3 次関数 $h(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，次の条件 (A), (B) を満たすものとする．

(A) $h(1)=1$, $h(-1)=-1$

(B) 区間 $-1<x<1$ で極大値 1，極小値 -1 をとる．

(1) $h(x)$ を求めよ．

(2) 3 次関数 $f(x)$ は x^3 の係数が $h(x)$ と等しく，区間 $-1\leq x\leq 1$ で $-1\leq f(x)\leq 1$ を満たす．
このとき，$f(x)=h(x)$ となることを示せ．

[答] (1) $h(x)=4x^3-3x$ (2) 証明略

【Example 1.2.1】　92 東工大

$c > 1$ を定数とする.

点 $(1, c)$ を通る直線 $\mathfrak{g}$ と放物線 $\mathfrak{C} : y = x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする $\mathfrak{g}$ の傾きを求めよ.

また，その最小面積を求めよ.

Point

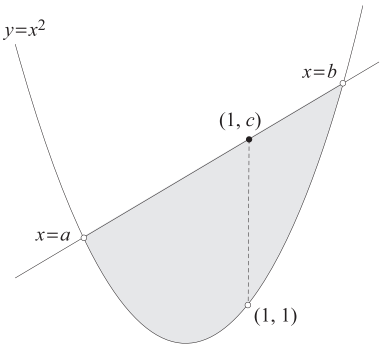
$$公式 : \int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{6}(b-a)^3 \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

【(2.1.1) の証明】

実直に計算しても易しいが，応用の効く次の方法を理解しよう.

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x &= \int_a^b (x-a)\{(x-a)-(b-a)\}\,\mathbf{d}x\\ &= \int_a^b \{(x-a)^2-(b-a)(x-a)\}\,\mathbf{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3-(b-a)\times\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^b = -\frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$

【解説】



$\mathfrak{g} : y = m(x-1)+c$ と $\mathfrak{C} : y = x^2$ の囲む部分の面積は，
$m(x-1)+c-x^2 = 0$ の 2 解を $x = a,\ b$ として，

$$\begin{aligned}\int_a^b \{m(x-1)+c-x^2\}\mathbf{d}x &= -\int_a^b \{x^2-mx+m-c\}\mathbf{d}x\\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x\\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \qquad \cdots\cdots(2.1.2)\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係を用いて，

$$(b-a)^3 = \{(a+b)^2-4ab\}^{\frac{3}{2}} = \{m^2-4(m-c)\}^{\frac{3}{2}} = \{(m-2)^2+4(c-1)\}^{\frac{3}{2}} \geq \{4(c-1)\}^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

従って，傾き 2 のとき最小面積は，$\dfrac{4}{3}(c-1)\sqrt{c-1}$.

[Note]　この程度の計算ならば必ずしも「解と係数の関係」を用いる必要はなく，「解の公式」を用いてもよい.

[Note]　(2.1.1) は被積分関数が 2 次関数であればよく，放物線と直線の囲む面積を求める場合に限らない.

【Example 1.2.2】

放物線 $\mathfrak{C} : y = ax^2$ $(a > 0)$ 上の 2 点 $P_1 : x = x_1$, $P_2 : x = x_2$ における接線をそれぞれ $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ とする．更に，2 接点 P_1, P_2 を結ぶ直線を $\mathfrak{g}$ として，$\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{g}$ の囲む領域の面積を S_{up}，$\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の囲む領域の面積を S_{low} とするとき，$S_{up} : S_{low} = 2 : 1$ が成り立つことを示せ．

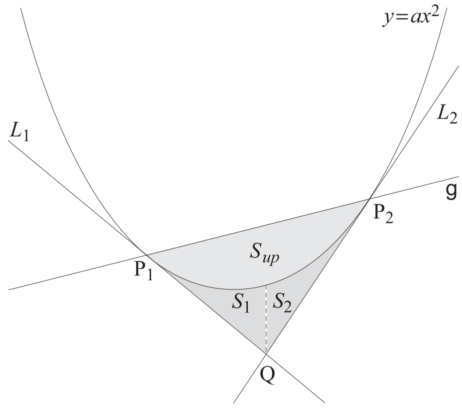
Point

積分公式

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

を用いて計算を効率化する．

【解説】



P_1 における接線 $\mathfrak{L}_1$ の方程式は，

$$y = 2ax_1(x - x_1) + ax_1{}^2 \iff y = 2ax_1x - ax_1{}^2 \quad \cdots\cdots(2.2.1)$$

P_2 における接線 $\mathfrak{L}_2$ の方程式は，

$$y = 2ax_2(x - x_2) + ax_2{}^2 \iff y = 2ax_2x - ax_2{}^2 \quad \cdots\cdots(2.2.2)$$

このとき，$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の交点 Q の座標は，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ ax_1x_2\right) \quad \cdots\cdots(2.2.3)$$

また，2 点 P_1, P_2 を結ぶ直線 $\mathfrak{g}$ の方程式は，

$$y = \frac{ax_2{}^2 - ax_1{}^2}{x_2 - x_1}(x - x_1) + ax_1{}^2 \iff y = a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 \quad \cdots\cdots(2.2.4)$$

であるから，題意の面積 S_{up} は，

$$S_{up} = \int_{x_1}^{x_2} \{a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 - ax^2\}\,\mathbf{d}x = -a \times \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2)\,\mathbf{d}x = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3 \quad \cdots\cdots(2.2.5)$$

一方，$\mathfrak{L}_1$，$\mathfrak{C}$，直線 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ の囲む部分の面積を S_1，
更に，$\mathfrak{L}_2$，$\mathfrak{C}$，直線 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ の囲む部分の面積を S_2 と表せば，

$$\begin{aligned}
S_{low} &= S_1 + S_2 \\
&= \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \{ax^2 - (2ax_1x - ax_1{}^2)\}\,\mathbf{d}x + \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} \{ax^2 - (2ax_2x - ax_2{}^2)\}\,\mathbf{d}x \\
&= a \times \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} (x - x_1)^2\mathbf{d}x + a \times \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} (x - x_2)^2\mathbf{d}x \\
&= \left[\frac{a}{3}(x - x_1)^3\right]_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} + \left[\frac{a}{3}(x - x_2)^3\right]_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} = \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 - \frac{a}{24}(x_1 - x_2)^3 \\
&= \frac{a}{12}(x_2 - x_1)^3 \quad \cdots\cdots(2.2.6)
\end{aligned}$$

(2.2.5), (2.2.6) により,

$$S_{up} : S_1 : S_2 = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3 : \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 : \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 = 4 : 1 : 1 \qquad \cdots\cdots(2.2.7)$$

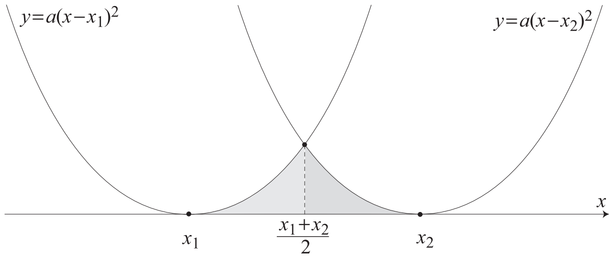
従って, (2.2.7) により,

$$S_{up} : S_{low} = 2 : 1 \qquad \cdots\cdots(2.2.8)$$

[Note]

(2.2.6) において, 明らかに $S_1 = S_2$ が成り立つ.
何故なら,

$$S_1 = \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} a(x - x_1)^2 \mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.2.9)$$



より, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}_1$, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ の囲む部分の面積 S_1 は,
放物線 $y = a(x - x_1)^2$, x 軸, 直線 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ の囲む領域の面積に**等積変形**でき,
S_2 も同様に, 放物線 $y = a(x - x_2)^2$, x 軸, 直線 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ の囲む領域の面積に一致するからである.

【Review 1.2.1】 98 東大

a は 0 でない実数とする.
関数 $f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ.

[答] $a = \pm 1$

【Review 1.2.2】 89 東大

$a\,(> 0)$ に対して, 次の 2 つの放物線を考える.

$$\mathfrak{C}_1 : y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \qquad \mathfrak{C}_2 : y = -(x - a)^2$$

(1) $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の双方に接するような直線が常に 2 本存在することを示せ.
(2) (1) で定まる 4 個の接点が作る四辺形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ.

[答] (1) 証明略 (2) $4\sqrt[4]{2}$

【Example 1.3】 83 東大

3 次曲線 $\mathfrak{C}: y = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) 上の点 P における接線 $\mathfrak{l}$ が P と異なる点 Q で $\mathfrak{C}$ と交わる．$\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{C}$ で囲まれた部分と Q における接線 $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{C}$ で囲まれた部分の面積の比を求め，これが一定であることを示せ．

Point

積分公式

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{12}(b-a)^4, \quad \int_a^b (x-a)(x-b)^2\mathbf{d}x = +\frac{1}{12}(b-a)^4$$

を用いて計算を効率化する．

【解説】

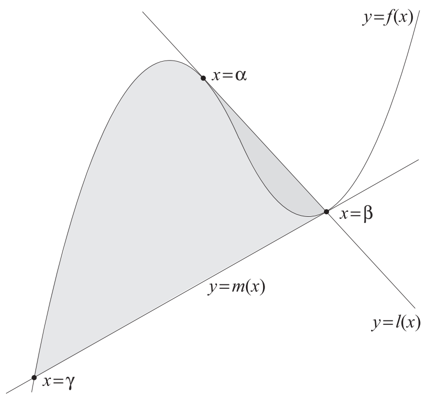
3 次曲線 $\mathfrak{C}: y = f(x)$ の $x = \alpha$, β における接線をそれぞれ

$$y = l(x) = px + q, \ \ y = m(x) = rx + s \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

とすると，

$$S_1 = \int_\alpha^\beta (l(x) - f(x))\,\mathbf{d}x = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

$$S_2 = \int_\gamma^\beta (f(x) - m(x))\,\mathbf{d}x = \int_\gamma^\beta (x-\gamma)(x-\beta)^2\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(\beta-\gamma)^4 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$



ここで，

$$l(x) - f(x) : px + q - (x^3 + ax^2 + bx + c) = -(x-\alpha)^2(x-\beta) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

$$f(x) - m(x) : x^3 + ax^2 + bx + c - (rx + s) = (x-\gamma)(x-\beta)^2 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

であるから，(3.4), (3.5) の 2 次の係数 a に注目すれば，

$$2\alpha + \beta = -a \ \wedge \ 2\beta + \gamma = -a \iff \beta - \gamma = 2(\beta - \alpha) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) を (3.2), (3.3) に用いて，

$$S_1 : S_2 = 1 : 16 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

[Note] (3.6) の導出は重要なので記憶に価する．

Comment

[**解説**] では，$\mathfrak{C}$ 上の 2 接点 $x = \alpha$, β の大小関係を $\alpha < \beta$ としたが，当然，$\alpha > \beta$ の場合も議論すべきである．その場合，S_1, S_2 の積分はどう書き換えるべきか? 結果は変わらず，$S_1 = \dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$, $S_2 = \dfrac{1}{12}(\beta-\gamma)^4$ であるが．

【Review 1.3.1】 89 弘前大

曲線 $\mathfrak{C}: y = x(x-1)(x-2)$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $\mathfrak{C}$ 上の点 $(a, a(a-1)(a-2))$ を接点とする $\mathfrak{C}$ の接線と $\mathfrak{C}$ の囲む図形の面積を a で表せ.

(2) 点 $(-1, t)$ から $\mathfrak{C}$ に引ける接線の個数を t の値の範囲で分類して調べよ.

(3) 点 $(-1, t)$ から $\mathfrak{C}$ に対して，3 本の接線が引けるものとする．それら 3 本の接線を接点の x 座標の小さい順に，$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ とする．これらの接線と $\mathfrak{C}$ の囲む図形の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき，$S_1 > S_2 > S_3$ が成り立つことを示せ.

[答] (1) $\dfrac{27}{4}(1-a)^4$ (2) $t < -6 \vee t > 2 \cdots 1,\ t = -6,\ 2 \cdots 2,\ -6 < t < 2 \cdots 3$

【Review 1.3.2】

方程式

$$x^3 - 3x - t = 0 \quad (0 \leq t \leq 2)$$

の実数解の内で最小の解を $\alpha(t)$，最大の解を $\gamma(t)$ とするとき，

$$\int_{t=0}^{t=2} (\gamma(t) - \alpha(t))\, \mathbf{d}t$$

の値を求めよ.

[答] $\dfrac{27}{4}$