【Example 3.1】

次の定積分を計算せよ.

$$I=\int_{-1}^{3}|x(x-1)(x-2)|\,\mathbf{d}x$$

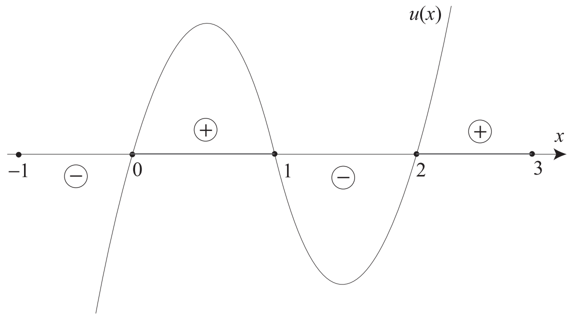
Point

被積分関数に絶対値を含む積分;

$$u(x)\geq 0 \implies \int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x=\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x \qquad u(x)\leq 0 \implies \int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x=-\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x$$

【解説】

$u(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$ と置き,
$u(x)$ のグラフからその符号を調べて,



$$I=\int_{-1}^{0}\{-u(x)\}\,\mathbf{d}x+\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x+\int_1^2\{-u(x)\}\,\mathbf{d}x+\int_2^3 u(x)\,\mathbf{d}x \quad \cdots\cdots(1.1)$$

ここで, $U(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+x^2$ と表せば,

$$I=-\Big[U(x)\Big]_{-1}^{0}+\Big[U(x)\Big]_0^1-\Big[U(x)\Big]_1^2+\Big[U(x)\Big]_2^3=U(-1)+2U(1)-2U(2)+U(3)\ \ (\because\ U(0)=0) \quad \cdots\cdots(1.2)$$

ここで,

$$U(-1)=\frac{9}{4},\ U(1)=\frac{1}{4},\ U(2)=0,\ U(3)=\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

であるから,

$$I=\frac{9}{4}+2\times\frac{1}{4}-2\times 0+\frac{9}{4}=5 \quad \cdots\cdots(1.4)$$

*やや高度ではあるが,$\cdots$ 絶対値を含む積分に関する次の定理は有名である.

Theorem

x の関数

$$f(x)=\int_a^b |u(t)-u(x)|\,\mathbf{d}t$$

は, $x=\dfrac{a+b}{2}$ において最小値をとる.
ここで, $u(x)$ は $a\leq x\leq b$ において単調な関数とする.

【Review 3.1.1】 2002 岩手大

実数 a が正の範囲を動くとき,

$$I(a)=\int_0^a \{6x|x+a-1|-2\}\,\mathbf{d}x$$

を最小にする a の値とその最小値を求めよ.

[答] $a=\dfrac{2}{3}$, 最小値 : $-\dfrac{10}{9}$

【Review 3.1.2】 2003 大阪市大

実数 a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき,

$$I(a)=\int_0^1 |x^2-2(a+1)x+a^2+2a|\,\mathbf{d}x$$

を最小にする a の値を求めよ.

[答] $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

【Review 3.1.3】

実数 a が正の範囲を動くとき,

$$I(a)=\int_0^1 |x^3+ax-1|\,\mathbf{d}x$$

を最小にする a の値を求めよ.

[答] $a=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

【Example 3.2】 94 東大

$0 < c < 1$ とする.

関数 $u(x) = -4x^3 + 3x^2$ に対して,

$$u_1(x) = u(x) + \int_0^c u(t)\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と置き, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $\cdots$ を順次

$$u_{n+1}(x) = u(x) + \int_0^c u_n(t)\,\mathbf{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

によって定義するとき, $u_n(x)$ を求めよ.

Point

定数型の**積分方程式** $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b (\cdots$未知関数$\cdots) =$ **定数** と置く

【解説】

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_n = \int_0^c u_n(t)\,\mathbf{d}t \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

このとき, (2.2), (2.3) により,

$$u_{n+1}(x) = u(x) + a_n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

であるから,

$$a_{n+1} = \int_0^c u_{n+1}(t)\,\mathbf{d}t = \int_0^c \{u(t) + a_n\}\,\mathbf{d}t = \Big[-t^4 + t^3 + a_n t\Big]_0^c = c\,a_n + c^3(1-c)$$

$$\therefore\ \ a_{n+1} = c\,a_n + c^3(1-c) \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

漸化式 (2.5) は,

$$a_{n+1} - c^3 = c\left(a_n - c^3\right) \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

と同値変形できるので,

$$a_n - c^3 = c^{n-1}\left(a_1 - c^3\right) \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

ここで,

$$a_1 = \int_0^c u_1(t)\,\mathbf{d}t = \int_0^c \{u(t) + c^3(1-c)\}\,\mathbf{d}t$$

$$= \Big[t^3(1-t) + c^3(1-c)t\Big]_0^c = c^3(1-c) + c^4(1-c) = c^3 - c^5 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) を (2.7) に代入して,

$$a_n = c^{n-1}(-c^5) + c^3 = c^3(1 - c^{n+1}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

$$\therefore\ \ u_n(x) = -4x^3 + 3x^2 + c^3(1 - c^n) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

Comment

被積分関数が n に依存するので, 定積分の値も n に依存することに注意して貰いたい.
解法の核心は, **定積分** $=$ **定数**に尽きるが, 計算の結果, 得られた方程式や漸化式が解けるか否かは別の問題である.

【Review 3.2.1】 98 京大

関数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は,

$$u_1(x)=4x^2+1,\quad u_{n+1}(x)=\int_0^1\{3x^2t\,u_n{}'(t)+3u_n(t)\}\,\mathbf{d}t\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって帰納的に定義されている. $u_n(x)$ を求めよ.

[答] $u_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$ $(n=1,2,3\cdots)$

【Review 3.2.2】

恒等的に 0 でない整式 $u(x)$ と実数 t が

$$u(x)=t\int_{-1}^1(6x^2+15y^2)u(y)\,\mathbf{d}y$$

を満たすとき, t の値と整式 $u(x)$ を求めよ.

[答] $t=\dfrac{1}{16},\ -\dfrac{1}{2},\ u(x)=k(x^2+1),\ k(2x^2-1)\ (k\neq 0)$

【Example 3.3】

恒等的に 0 でない整式 $f(x)$ が,

$$\left(\int_0^x f(t)\,\mathbf{d}t\right)^2 = x^3 f(x) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ.

Point

整関数型の**積分方程式** $\Longrightarrow$ 未知関数の**次数を決定**

【解説】

$f(x)$ は整式なので,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と置ける．これを (3.1) に戻して**最高次の係数を比較**すると,

$$\left(\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}\right)^2 = x^3 \times a_n x^n \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

$a_n \neq 0$ であるから，(3.3) 両辺の次数に関して,

$$2(n+1) = n+3 \qquad \therefore\ n = 1 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

このとき,

$$\left(\frac{1}{2}a_1\right)^2 = a_1 \qquad \therefore\ a_1 = 4 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.2), (3.4), (3.5) より，$f(x) = 4x + c$ と置けるので,

$$\left(\int_0^x (4t+c)\,\mathbf{d}t\right)^2 = x^3(4x+c) \iff (2x^2+cx)^2 = x^3(4x+c) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) 両辺の係数比較をして，$c = 0$ を得るので,

$$f(x) = 4x \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

Comment

本問では整式 (= 多項式 = 整関数) という条件が決定的である．無数の関数の中から「整式だけを考えればよい」からである．その意味で，これは大変**強い制約条件**である．文系の人は，関数と言えばすべて整式を思い浮かべるかも知れないが，それ故，この条件の重要さを見落としがちなので注意してほしい．理系の人は，微分方程式を作り，それを解く問題 (解を整関数に限る必要はない) とまったく異なる解き方であることを認識せよ．また，このタイプの問題は，与えられた方程式の形に応じて下の**微分積分学の基本定理**を用いると計算が大幅に効率化される.

Theorem

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_a^x u(t)\,\mathbf{d}t = u(x), \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_a^{v(x)} u(t)\,\mathbf{d}t = u(v(x))\cdot v'(x)$$

【Review 3.3.1】 97 東北大

次の等式を満たす連続関数 $u(x)$ を求めよ.

$$\int_0^x \{u(t)-t+1\}\,\mathbf{d}t = \int_{-1}^1 (x-t)^3 u(t)\,\mathbf{d}t + \frac{2}{25}$$

[答] $u(x) = \frac{30}{31}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{5}{31}$

【Review 3.3.2】

恒等的に 0 でない整式 $f(x)$ が

$$\int_0^{3x} (t-1)\,f''(t)\,\mathbf{d}t = 54\,f(x)$$

を満たすとき，$f(x)$ をすべて求めよ.

[答] $f(x) = k(15x^3 - 9x^2 + x)\ (k \neq 0)$

【Review 3.3.3】 93 京大

$f(x)$ を x の整式，α を定数とする.

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathbf{d}t = \alpha f(x)$$

がすべての実数 x で成り立つとき，$f(x)$ は定数であることを示せ.

[証明略]

【Review 3.3.4】 99 関西大

整式の列 $\{u_n(x)\}$ が

$$u_1(x) = 1, \quad u_{n+1}(x) = 1 + x\,u_n(x) + \int_0^x u_n(t)\,\mathbf{d}t \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき，$u_n(x)$ を求めよ.

[答] $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$